

**Lundi 2 septembre 2024, de 9h à 12h**

Lecture du poly sur les suites numériques, approfondissement sur les suites arithmético-géométriques et sur les suites définies par une récurrence linéaire d'ordre deux. Notion de limite. Suites réelles: limites et inégalités, théorème de la limite monotone, suites adjacentes. Exemples et exercices.

*Pour mercredi 4 septembre: exos 2, 4, 7, 15 et 24 de la feuille "suites".*

**Mercredi 4 septembre 2024, de 8h à 10h**

Calcul asymptotique (dans le cadre des suites), exemples, croissances comparées usuelles, notion de développement asymptotique.

Toute partie non vide de  $\mathbb{N}$  admet un minimum. Principe de récurrence.

**TD classe entière (11h30-13h):** exos 2, 4 et 24 de la feuille "suites".

*Pour jeudi 5 septembre: exos 8(a,b,c), 11 et 22 de la feuille "suites".*

**Jeudi 5 septembre 2024, de 10h à 12h**

Ensembles dénombrables, énumération. Ensembles au plus dénombrables. Exemples de  $\mathbb{N}$ , de  $\mathbb{Z}$ , de  $\mathbb{N}^2$ . Tout produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est encore dénombrable. Les parties infinies de  $\mathbb{N}$  sont dénombrables.  $\mathbb{Q}$  est dénombrable. Les ensembles  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  et  $\mathbb{R}$  ne sont pas dénombrables.

Série numériques: exemples introductifs, notion de série convergente ou divergente, sommes partielles, somme et restes en cas de convergence.

**TD groupe A (13h-14h30):** exos 8a, 11 et 22a. de la feuille "suites".

**TD groupe B (14h30-16h):** exos 8a et 11 de la feuille "suites" + points fixes attractifs et répulsifs.

*Pour lundi 9 septembre: exos 6, 10 et 19 de la feuille "suites".*

## Lundi 9 septembre 2024, de 10h à 13h

Correction de l'exo 6 sur les suites.

Généralités sur les séries: linéarité de la somme, condition nécessaire de convergence (le terme général tend vers zéro), exemple des séries géométriques, lien entre suites et séries (une suite converge si et seulement si la série télescopique associée converge).

Séries à termes positifs: conventions de calcul dans  $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ , condition nécessaire et suffisante de convergence (les sommes partielles sont majorées), séries de référence (géométriques et Riemann), théorèmes de comparaison (notamment le critère des équivalents), règle de Riemann (ou "règle  $n^\alpha u_n$ ").

*Pour mercredi 11 septembre: exos 3 et 4 de la feuille "séries".*

## Mercredi 11 septembre 2024, de 8h à 10h

Règle de d'Alembert. Technique de comparaison série-intégrale.

Séries à termes quelconques, convergence absolue. La convergence absolue entraîne la convergence.

**TD groupe B (10h-11h30):** exos 3, 4 et 6 de la feuille "séries".

**TD groupe A (11h30-13h):** idem.

*Pour jeudi 12 septembre: exos 8, 11, 25 et 30 de la feuille "séries".*

## Jeudi 12 septembre 2024, de 10h à 12h

Théorème spécial des séries alternées, avec propriétés des restes. Exemples de séries semi-convergentes.

Formule de Stirling.

La série exponentielle.

**TD groupe B (13h-14h30):** exos 8, 11 et 30 de la feuille "séries".

**TD groupe A (14h30-16h):** exos 8, 11, 25 et 30 de la feuille "séries".

*Pour lundi 16 septembre: exos 15a, 15c, 16 et 18 de la feuille "séries".*

## Samedi 14 septembre 2024, de 8h à 12h

DS numéro 1 (4 heures): vitesse de convergence d'une suite (*extrait de Centrale PC 2017*), accélération de convergence (procédés de Richardson-Romberg et d'Aitken).

## Lundi 16 septembre 2024, de 10h à 13h

Correction de l'exo 15a sur les séries.

Lecture du début du poly sur l'algèbre linéaire: structure d'espace vectoriel, sous-espaces vectoriels, somme de deux s.e.v., somme directe, supplémentaires, familles libres, génératrices, bases, coordonnées d'un vecteur. Théorie de la dimension, rang d'une famille de vecteurs, formule de Grassmann.

Produit de Cauchy de deux séries numériques.

Toute série  $\sum a_n$  absolument convergente est "commutativement convergente", définition dans ce cas de  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ , de  $\sum_{n \in A} a_n$  où  $A$  est une partie de  $\mathbb{N}$ .

*Pour mercredi 18 septembre:* exos 22 et 26(a,b) de la feuille "séries" + exos 5 et 6 de la feuille "algèbre linéaire".

*Pour jeudi 26 septembre:* DM 1

## Mercredi 18 septembre 2024, de 8h à 10h

Lecture du poly sur l'algèbre linéaire: application linéaire, noyau, image. Endo-, iso- et automorphismes. Détermination par les images des vecteurs d'une base ou par les restrictions à deux sous-espaces supplémentaires. Endomorphismes particuliers: homothéties, projecteurs et symétries. Rang d'une application linéaire. Forme géométrique du théorème du rang, théorème du rang. Notion d'équation linéaire, compatibilité, obtention des solutions.

**TD groupe A (10h-11h30):** exos 22a et 26 de la feuille "séries" + exo 6 de la feuille "algèbre linéaire".

**TD groupe B (11h30-13h):** exo 26 de la feuille "séries" + exos 5 et 6 de la feuille "algèbre linéaire".

*Pour jeudi 19 septembre:* exos 7, 10, 12 et 15 de la feuille "algèbre linéaire".

## Jeudi 19 septembre 2024, de 10h à 12h

Produit cartésien d'un nombre fini d'espaces vectoriels, dimension.

Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels, somme directe.

En dimension finie, on a  $\dim \left( \sum_{i=1}^m E_i \right) \leq \sum_{i=1}^m \dim(E_i)$ , avec égalité si et seulement si la somme est directe. Base adaptée à un sous-espace vectoriel de  $E$ , ou à une décomposition de  $E$  en somme directe de  $m$  sous-espaces. Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.

**TD groupe A (13h-14h30):** exos 7, 10 et 12 de la feuille "algèbre linéaire".

**TD groupe B (14h30-16h):** exos 7, 12 et 15 de la feuille "algèbre linéaire".

*Pour lundi 23 septembre:* exos 18, 27, 30 et 31 de la feuille "algèbre linéaire".

### Lundi 23 septembre 2024, de 10h à 13h

En dimension quelconque, projecteurs associés à une décomposition de  $E$  en somme directe, détermination d'une application linéaire par ses restrictions aux sous-espaces d'une telle décomposition.

Formes linéaires, hyperplans: formes linéaires coordonnées relativement à une base, définition d'un hyperplan comme noyau d'une forme linéaire non nulle, caractérisation comme sous-espace admettant comme supplémentaire une droite. Hyperplans en dimension finie, équations cartésiennes dans une base. Dimension de l'espace des solutions d'un système linéaire homogène.

L'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , matrices élémentaires  $E_{i,j}$ , relation  $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$ .

Relations  $E_i E_j^\top = E_{i,j}$  et  $E_i^\top E_j = \delta_{i,j}$ , ainsi que  $C_j(A) = AE_j$ ,  $L_i(A) = E_i^\top A$  et  $a_{i,j} = E_i^\top A E_j$ . Matrices diagonales, triangulaires, symétriques, antisymétriques. Matrices inversibles. Transposition.

*Pour mercredi 25 septembre: exos 21, 22, 30 et 44 de la feuille "algèbre linéaire".*

### Mercredi 25 septembre 2023, de 8h à 10h

Lecture du poly sur le calcul matriciel: représentation d'une application linéaire par une matrice, application linéaire canoniquement associée à une matrice, matrices de passage et changements de bases.

Matrices définies par blocs, opérations, matrices diagonales ou triangulaires par blocs.

Sous-espace stable par un endomorphisme, notion d'endomorphisme induit.

Si deux endomorphismes commutent, alors le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

**TD groupe B (10h-11h30):** exos 21, 30 et 44 de la feuille "algèbre linéaire".

**TD groupe A (11h30-13h):** idem.

*Pour jeudi 26 septembre: exos 32, 33, 35 et 43 de la feuille "algèbre linéaire".*

### Jeudi 26 septembre 2024, de 10h à 12h

Lien entre sous-espaces stables et matrices diagonales ou triangulaires par blocs.

Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie.

Polynômes d'endomorphismes ou de matrices, définitions, opérations. Polynômes annulateurs.

**TD groupe B (13h-14h30):** exos 32 et 35 de la feuille "algèbre linéaire".

**TD groupe A (14h30-16h):** exos 32, 33 et 35 de la feuille "algèbre linéaire".

*Pour lundi 30 septembre: exos 38, 40, 48 et 54 de la feuille "algèbre linéaire".*

### Lundi 30 septembre 2024, de 10h à 13h

Utilisation des polynômes annulateurs: calcul de l'inverse d'une matrice, des puissances d'une matrice. Exercice 48 de la feuille "algèbre linéaire".

Fonctions continues par morceaux sur un segment, définition, propriétés. Construction de l'intégrale d'une telle fonction (d'abord à valeurs réelles, puis à valeurs complexes), propriétés. Fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque.

Théorème fondamental de l'analyse, étude de fonctions de la forme  $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ , formule d'intégration par parties, formule du changement de variable.

*Pour mercredi 2 octobre:* exo 38 de la feuille "algèbre linéaire" + exos 6, 8 et 11 de la feuille "révisions d'analyse et fonctions intégrables".

### Mercredi 2 octobre 2023, de 8h à 10h

Intégrales généralisées sur  $[a, +\infty[$ , définition. Intégrales  $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ .

Cas des fonctions positives: l'intégrale est convergente si et seulement si les intégrales partielles sont majorées, règle de comparaison avec  $0 \leq f \leq g$ .

Adaptation à un intervalle de la forme  $[a, b[$  avec  $-\infty < a < b \leq +\infty$ , ou  $]a, b]$  avec  $-\infty \leq a < b < +\infty$ . L'intégrale  $\int_0^1 \ln(t) dt$  converge. Nature de  $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ .

**TD groupe A (10h-11h30):** exo 38 de la feuille "algèbre linéaire" + exos 6 et 11 de la feuille "révisions d'analyse et fonctions intégrables".

**TD groupe B (11h30-13h):** exo 38 de la feuille "algèbre linéaire" + exos 8 et 11 de la feuille "révisions d'analyse et fonctions intégrables".

*Pour jeudi 3 octobre:* exos 15 (intégrale  $I_1$ ), 18 et 19 de la feuille "révisions d'analyse et fonctions intégrables".

### Jeudi 3 octobre 2024, de 10h à 12h

Cas des intégrales "faussement généralisées", intégrales sur  $]a, b[$ .

Propriétés des intégrales généralisées: linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Changement de variable et intégration par parties dans des intégrales généralisées.

**TD groupe A (13h-14h30):** exos 18 et 19 de la feuille "révisions d'analyse et fonctions intégrables" + formes linéaires sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $\varphi(AB) = \varphi(BA)$ .

**TD groupe B (14h30-16h):** idem.

*Pour lundi 7 octobre:* exos 16 (intégrales  $I_1$  et  $I_2$ ), 17 et 21 de la feuille "révisions d'analyse et fonctions intégrables".

### Samedi 5 octobre 2024, de 8h à 12h

DS numéro 2 (4 heures): propriétés des matrices nilpotentes + un opérateur sur les suites.

### **Lundi 7 octobre 2024, de 10h à 13h**

Intégrales généralisées absolument convergentes, la convergence absolue entraîne la convergence. Un exemple d'intégrale semi-convergente: l'intégrale de Dirichlet. Fonction intégrable sur un intervalle, exemple des fonctions de référence. Invariance par translation ou symétrie. Théorèmes de comparaison, notamment "toute fonction majorée en module par une fonction intégrable est intégrable", pratique des études locales aux bornes.

*Pour mercredi 9 octobre: exos 3, 4, 14 et 23 de la feuille "révisions d'analyse et fonctions intégrables".*

### **Mercredi 9 octobre 2023, de 8h à 10h**

Théorème de stricte positivité.

Espaces vectoriels  $L^1(I, \mathbb{K})$  et  $L_c^2(I, \mathbb{R})$ , produit scalaire et norme associée sur ce dernier, inégalité de Cauchy-Schwarz.

Suites de fonctions: définition de la convergence simple. Exemples. La convergence simple ne conserve pas la continuité des fonctions et n'autorise pas à intervertir limite et intégrale sur un segment.

**TD groupe B (10h-11h30):** exos 3, 4, 14 et 23 de la feuille "révisions d'analyse et fonctions intégrables".

**TD groupe A (11h30-13h):** idem.

*Pour jeudi 10 octobre: exos 20 et 24 de la feuille "révisions d'analyse et fonctions intégrables".*

### **Jeudi 10 octobre 2024, de 10h à 12h**

Introduction de la notation  $\|f\|_\infty$ , convergence uniforme. Exemples. Idée de majoration uniforme. Cas de la convergence uniforme sur tout segment.

Régularité de la limite d'une suite de fonctions: théorème de continuité, interversion limite-intégrale sur un segment.

**TD groupe B (13h-14h30):** exo 20 de la feuille "révisions d'analyse et fonctions intégrables" + matrices semblables et changements de bases.

**TD groupe A (14h30-16h):** idem.

*Pour lundi 14 octobre: exos 2, 6 et 8 de la feuille "suites et séries de fonctions".*

### **Lundi 14 octobre 2024, de 10h à 13h**

Théorème de dérivation (classe  $\mathcal{C}^1$ ) de la limite d'une suite de fonctions, extension aux fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Séries de fonctions: convergence simple, convergence uniforme, convergence normale. La convergence normale entraîne la convergence uniforme, la réciproque est fautive (contre-exemple).

*Pour mercredi 16 octobre:* exos 6 et 10 de la feuille "suites et séries de fonctions".

### **Mercredi 16 octobre 2023, de 8h à 10h**

Théorèmes concernant la régularité de la somme d'une série de fonctions: continuité, intégration terme à terme sur un segment, dérivabilité avec extension aux fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ , théorème de la double limite (*admis*).

Lecture du poly (début) sur les déterminants: déterminant d'une famille de  $n$  vecteurs dans un espace vectoriel de dimension  $n$  rapporté à une base, déterminant d'un endomorphisme en dimension finie, déterminant d'une matrice carrée. Définitions et propriétés générales.

**TD groupe A (10h-11h30):** exos 6, 10 et 13 de la feuille "suites et séries de fonctions".

**TD groupe B (11h30-13h):** idem.

*Pour jeudi 17 octobre:* exos 11 et 15 de la feuille "suites et séries de fonctions".

### **Jeudi 17 octobre 2024, de 10h à 12h**

Rappels sur les opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice, interprétation en termes de produit matriciel, conservation du rang. Algorithme du pivot de Gauss, algorithme de Gauss-Jordan pour inverser une matrice carrée (inversible!). Complexité de l'algorithme.

Effet des opérations élémentaires sur le déterminant d'une matrice, cofacteurs, développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminants de matrices triangulaires par blocs. Déterminant de Vandermonde.

**TD groupe A (13h-14h30):** exos 11 et 15 de la feuille "suites et séries de fonctions".

**TD groupe B (14h30-16h):** idem.

*Pour lundi 4 novembre:* exos 16 et 17 de la feuille "suites et séries de fonctions" + exos 1, 3, 5, 7, 9, 12 et 14 de la feuille "déterminants".

---

**VACANCES de TOUSSAINT**

---

## Lundi 4 novembre 2024, de 10h à 13h

Polynômes d'interpolation de Lagrange.

Définition des vecteurs propres et des valeurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Un vecteur  $x$  non nul est vecteur propre de  $u \in \mathcal{L}(E)$  si et seulement si la droite vectorielle  $\text{Vect}(x)$  est stable par  $u$ .

Correction de l'exo 17 de la feuille "suites et séries de fonctions".

*Pour mercredi 6 novembre:* exos 1, 3, 5, 7, 9, 12 et 15 de la feuille "déterminants" + exo 2 de la feuille "réduction des endomorphismes".

## Mercredi 6 novembre 2023, de 8h à 10h

Notion de spectre en dimension finie. Si  $E$  est **de dimension finie**, alors

$$\lambda \in \text{Sp}(u) \iff u - \lambda \text{id}_E \notin \text{GL}(E) \iff \det(u - \lambda \text{id}_E) = 0.$$

Sous-espaces propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Si deux endomorphismes commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre. Si  $u(x) = \lambda x$ , alors  $P(u)(x) = P(\lambda) x$  pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Conséquence: si  $P$  est un polynôme annulateur de  $u$ , alors les valeurs propres de  $u$  sont racines de  $P$ . Exemples.

**TD groupe B (10h-11h30):** exos 1, 3, 5 et 15 de la feuille "déterminants".

**TD groupe A (11h30-13h):** exos 3, 5, 7 et 15 de la feuille "déterminants".

*Pour jeudi 7 novembre:* exos 2, 4 et 5 de la feuille "réduction des endomorphismes".

*Pour lundi 18 novembre:* DM 3.

## Jeudi 7 novembre 2024, de 10h à 12h

Les sous-espaces propres sont en somme directe. Conséquences: en dimension finie  $n$ ,  $\text{Card}(\text{Sp}(u)) \leq n$  et  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) \leq n$ . Une famille de vecteurs propres associés

à des valeurs propres distinctes est libre.

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée d'ordre  $n$ , écriture

$$\chi_A = X^n - \text{tr}(A) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A).$$

**TD groupe B (13h-14h30):** exos 2 et 4 de la feuille "réduction des endomorphismes".

**TD groupe A (14h30-16h):** idem.

*Pour mercredi 13 novembre:* exos 9, 11 et 12 de la feuille "réduction des endomorphismes".

## Samedi 9 novembre 2024, de 8h à 12h

DS numéro 3 (4 heures): fonction Gamma d'Euler (caractérisation de  $\ln \circ \Gamma$ ) + matrices symplectiques.



### **Mercredi 13 novembre 2023, de 8h à 10h**

Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire, de deux matrices semblables, d'une transposée. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie.

Les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme caractéristique.

Conséquences: en dimension  $n$ , il y a au plus  $n$  valeurs propres ; un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, ou d'un  $\mathbb{R}$ -espace de dimension impaire, a au moins une valeur propre.

Multiplicité d'une valeur propre. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit. Inégalité  $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$  pour  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ .

**TD groupe A (10h-11h30):** exos 11, 12 et 14 de la feuille "réduction des endomorphismes".

**TD groupe B (11h30-13h):** exos 9, 11, 12 et 14 de la feuille "réduction des endomorphismes".

*Pour jeudi 14 novembre:* exos 5, 10 et 15 de la feuille "réduction des endomorphismes".

### **Jeudi 14 novembre 2024, de 10h à 12h**

Expression de la trace et du déterminant à l'aide des valeurs propres lorsque le polynôme caractéristique est scindé.

Notion de matrice ou d'endomorphisme diagonalisable, diagonalisation effective  $A = PDP^{-1}$ , interprétation de  $D$  et de  $P$ . Condition suffisante de diagonalisabilité: si un endomorphisme d'un e.v. de dimension  $n$  admet  $n$  valeurs propres distinctes, alors il est diagonalisable et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité: la somme (directe) des sous-espaces propres est  $E$ , ou bien la somme des dimensions des sous-espaces propres est  $n = \dim(E)$ .

**TD groupe A (13h-14h30):** exos 10 et 15 de la feuille "réduction des endomorphismes".

**TD groupe B (14h30-16h):** idem.

*Pour lundi 18 novembre:* exos 13, 17 et 22 de la feuille "réduction des endomorphismes".

### **Lundi 18 novembre 2024, de 10h à 13h**

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre est égale à la multiplicité.

Un endomorphisme  $u$  est diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, ou bien si et seulement si le polynôme  $P = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)$  est annulateur de  $u$ . L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable.

*Pour mercredi 20 novembre: exos 18, 19, 21 et 26 de la feuille "réduction des endomorphismes".*

### **Mercredi 20 novembre 2023, de 8h à 10h**

Endomorphismes et matrices trigonalisables. Interprétation en termes de sous-espaces stables.

Théorème de Cayley-Hamilton, preuve dans le cas trigonalisable.

Un endomorphisme (ou une matrice) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

**TD groupe B (10h-11h30):** exos 19, 21 et 26 de la feuille "réduction des endomorphismes".

**TD groupe A (11h30-13h):** idem.

*Pour jeudi 21 novembre: exos 25, 34 et 40 de la feuille "réduction des endomorphismes".*

### **Jeudi 21 novembre 2024, de 10h à 12h**

Applications de la réduction: calculs de puissances de matrices, expression de suites vectorielles définies par une relation de récurrence linéaire.

Séries entières: définition, exemples. Lemme d'Abel. Définition du rayon de convergence.

**TD groupe B (13h-14h30):** exos 25, 34 et 40 de la feuille "réduction des endomorphismes".

**TD groupe A (14h30-16h):** idem.

*Pour lundi 25 novembre: exos 29, 38 et 44 de la feuille "réduction des endomorphismes".*