COLLES de MATHÉMATIQUES **PSI2 2024-2025**

Semaine 9 : du 25/11 au 29/11

Réduction des endomorphismes

Notions de valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre pour un endomorphisme ou une matrice carrée. Propriétés. Définition et propriétés du polynôme caractéristique: *cf.* programme précédent.

Notion d'endomorphisme (ou de matrice) diagonalisable. Diagonalisation effective $A = PDP^{-1}$, interprétation des matrices P et D.

Condition suffisante de diagonalisablilité: si un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admet n valeurs propres distinctes, alors il est diagonalisable.

Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisablilité:

$u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable **ssi** $\displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E$ **ssi** $\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \dim\big(E_\lambda(u)\big) = \dim(E)$.

$u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable **ssi** χ_u est scindé et $\forall\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \quad \dim E_\lambda(u) = m_\lambda$.

$u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable **ssi** u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

$u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable **ssi** $P = \displaystyle\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)$ est annulateur de u.

L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est aussi diagonalisable.

Théorème de Cayley-Hamilton.

Endomorphismes et matrices trigonalisables, interprétation en termes de sous-espaces stables.
CNS : $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable **ssi** χ_u est scindé.

Applications de la réduction: calculs de puissances de matrices, expression de suites vectorielles satisfaisant une relation de récurrence linéaire.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Lien entre polynômes annulateurs et valeurs propres.
- Existence de valeurs propres pour $u \in \mathcal{L}(E)$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et E de dimension impaire.
- Inégalité $\forall\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \quad 1 \le \dim E_\lambda(u) \le m_\lambda$.
- u est diagonalisable $\iff \displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E \iff \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim(E)$.
- $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement A et B sont diagonalisables.
- Théorème de Cayley-Hamilton. Preuve dans le cas diagonalisable (*voire trigonalisable ?*)