Éléments propres.

1. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}[X]$. Montrer que la seule valeur propre de l'opérateur de dérivation $D : P \mapsto P'$ est 0, préciser le sous-espace propre associé.

- -

Le nombre 0 est valeur propre de D puisque $\text{Ker}\, D = \mathbb{K}_0[X] \simeq \mathbb{K}$ (ensemble des polynômes constants, identifié au corps des scalaires, on peut aussi le noter $\text{Vect}(1)$) n'est pas réduit à $\{0\}$, donc $E_0(D) = \mathbb{K}_0[X]$.

S'il existait une valeur propre non nulle λ, un polynôme propre associé serait un polynôme P non nul tel que $P' = \lambda P$, mais ceci est impossible puisque $\deg(\lambda P) = \deg(P) \neq \deg(P')$. Donc la seule valeur propre est 0.

---

2. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

a. Montrer que, si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est aussi valeur propre de $v \circ u$.

b. Si E est de dimension finie, montrer que $\text{Sp}(v \circ u) = \text{Sp}(u \circ v)$.

c. Si E est de dimension infinie, montrer que 0 peut être valeur propre de $u \circ v$ sans être valeur propre de $v \circ u$. *On pourra, dans $E = \mathbb{K}[X]$, considérer l'opérateur de dérivation $D : P \mapsto P'$ et un "opérateur de primitivation" $\Phi : P \mapsto \int_0^X P(t)\, \mathrm{d}t$.*

- -

a. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ une valeur propre **non nulle** de $u \circ v$, il existe alors un vecteur x **non nul** de E tel que $u \circ v(x) = \lambda x$. En appliquant v, on obtient $v \circ u \circ v(x) = \lambda\, v(x)$, soit $(v \circ u)\big(v(x)\big) = \lambda\, v(x)$. Or, le vecteur $v(x)$ est **non nul** : en effet, si on avait $v(x) = 0_E$, cela entraînerait $\lambda x = u\big(v(x)\big) = 0_E$ donc $x = 0_E$ puisque λ est non nul, et c'est absurde. Le scalaire λ est donc aussi valeur propre de $v \circ u$, le vecteur **non nul** $v(x)$ étant un vecteur propre associé.

b. En dimension finie, on peut utiliser les déterminants. Rappelons que le spectre est alors l'ensemble des valeurs propres (*faux en dimension infinie*). Si λ est un scalaire non nul, il appartient à $\text{Sp}(u \circ v)$ si et seulement s'il appartient à $\text{Sp}(v \circ u)$ d'après la question **a.** Il reste à étudier le cas $\lambda = 0$, mais rappelons que 0 est valeur propre d'un endomorphisme si et seulement si cet endomorphisme est non injectif, c'est-à-dire (en dimension finie) de déterminant nul. Donc

$$0 \in \text{Sp}(u \circ v) \iff \det(u \circ v) = 0 \iff \det(u)\det(v) = 0 \iff \det(v \circ u) = 0 \iff 0 \in \text{Sp}(v \circ u)\ .$$

c. Considérons les endomorphismes D et Φ de $\mathbb{R}[X]$ aimablement prêtés par l'énoncé. Notons d'abord que, si P est un polynôme, $\Phi(P)$ est "la primitive de P qui s'annule en zéro", autrement dit si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, alors $\Phi(P) = \sum_{k=0}^{d} a_k \frac{X^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{d+1} \frac{a_{k-1}}{k}\, X^k$. Il est immédiat de vérifier que, pour tout polynôme P, on a $D\big(\Phi(P)\big) = P$, donc $D \circ \Phi = \text{id}_E$ et l'endomorphisme $D \circ \Phi$ est injectif et n'admet donc pas 0 pour valeur propre.

Par contre, pour tout polynôme P, on a $\Phi\big(D(P)\big) = P - P(0)$: si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, alors $\Phi\big(D(P)\big) = \sum_{k=1}^{d} a_k X^k = P - a_0$; ainsi, $\text{Ker}(\Phi \circ D)$ est l'ensemble $\mathbb{K}_0[X] \simeq \mathbb{K}$ des polynômes constants et l'endomorphisme $\Phi \circ D$ n'est pas injectif donc admet 0 pour valeur propre.

---

3. Localisation des valeurs propres.

Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n\geq 2$. Pour chaque $i\in[\![1,n]\!]$, on pose $\rho_i=\displaystyle\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|$ et on note D_i le disque fermé de $\mathbb{C}$ de centre $a_{i,i}$ et de rayon ρ_i. Montrer que $\mathrm{Sp}(A)\subset\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}D_i$.

- -

On a $D_i=\big\{z\in\mathbb{C}\ \big|\ |a_{ii}-z|\leq\rho_i\big\}$. Donc, si un nombre complexe λ n'appartient pas à la réunion des disques D_i, on a

$$\forall i\in[\![1,n]\!]\qquad |a_{ii}-\lambda|>\rho_i=\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\ ,$$

autrement dit la matrice $A-\lambda\,I_n$ est à diagonale strictement dominante (*cf. exercice 21 de la feuille "Algèbre linéaire"*), et elle est donc inversible d'après le théorème d'Hadamard, ce qui veut dire que λ n'est pas valeur propre de la matrice A. Par contraposition, on a donc prouvé que $\mathrm{Sp}(A)\subset\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}D_i$. Pour la culture, les disques D_i s'appellent **disques de Gerschgorin** de la matrice A.

---

4. Soit $E=\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Pour $f\in E$, on pose

$$\forall x\in[0,1]\qquad U(f)(x)=\int_0^1\min\{x,t\}\,f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

a. Montrer que U est un endomorphisme de E et que, pour tout $f\in E$, l'application $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.

b. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme U.

- -

a. La linéarité de U résulte immédiatement de la linéarité de l'intégrale. Pour $f\in E$, on a

$$\forall x\in[0,1]\qquad U(f)(x)=\int_0^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t+x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Ainsi écrit, il est évident que la fonction $g=U(f)$ est continue, et même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ (donc U est bien un endomorphisme de l'espace vectoriel E), avec

$$\forall x\in[0,1]\qquad g'(x)=x\,f(x)+\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t-x\,f(x)=\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Puis g' est elle-même dérivable, donc la fonction $g=U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, avec $g''=-f$.

Remarque. La fonction $g=U(f)$ est **la** solution unique du problème **(P)** : $\begin{cases}g''=-f\\ g(0)=0\\ g'(1)=0\end{cases}.$

En effet, la fonction g vérifie **(P)**, et on montre facilement que deux fonctions vérifiant **(P)** sont nécessairement égales (si $g''=h''=-f$, alors $g-h$ est une fonction affine, et je laisse le lecteur poursuivre le raisonnement). Attention, **(P)** n'est pas un "problème de Cauchy".

b. • Si $U(f)=0$, alors $f=-\big(U(f)\big)''=0$, donc $\mathrm{Ker}\,U=\{0\}$, et le réel 0 n'est pas valeur propre de U.

• Si λ est un réel non nul, en utilisant la remarque ci-dessus, on peut écrire

$$U(f)=\lambda\,f \iff \big(\lambda\,f \text{ est solution de } \mathbf{(P)}\big) \iff \begin{cases} f''+\dfrac{1}{\lambda}\,f=0 \\ \quad f(0)=0 \\ \quad f'(1)=0 \end{cases}.$$

La forme des solutions de l'équation différentielle **(E)** : $f''+\dfrac{1}{\lambda}\,f=0$ dépend du signe de λ :

▷ si $\lambda<0$, posons $\lambda=-\dfrac{1}{\omega^2}$, les solutions de **(E)** sont de la forme $f(x)=A\,\mathrm{ch}\,\omega x+B\,\mathrm{sh}\,\omega x$; les conditions $f(0)=f'(1)=0$ entraînent $A=0$ et $B\,\omega\ \mathrm{ch}\,\omega=0$, donc $B=0$, puis $f=0$, et λ n'est pas valeur propre de U ;

▷ si $\lambda>0$, posons $\lambda=\dfrac{1}{\omega^2}$ avec $\omega>0$, les solutions de **(E)** sont $f(x)=A\cos\omega x+B\sin\omega x$; les conditions $f(0)=f'(1)=0$ se traduisent par $A=0$ et $B\,\omega\ \cos\omega=0$: on trouve alors des solutions ("fonctions propres" f) non nulles si et seulement si $\cos\omega=0$, autrement dit si et seulement si $\omega=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{N}$.

Conclusion. Les valeurs propres de l'endomorphisme U sont les réels $\lambda_k=\dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)^2}$ avec $k\in\mathbb{N}$ et, pour tout $k\in\mathbb{N}$, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k est la droite vectorielle engendrée par la fonction $f_k : x\mapsto \sin\left[\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)x\right]$.

---

5. Trouver toutes les matrices $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2=A$, avec $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$. *On rappelle que, lorsque deux endomorphismes commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.*

- -

Si une matrice M vérifie $M^2=A$, alors elle commute avec A ($MA=AM=M^3$), donc elle laisse stables les sous-espaces propres de A. Or, la matrice A admet deux valeurs propres, 1 et 4, et on vérifie facilement que les sous-espaces propres sont deux droites vectorielles $E_1(A)=\mathrm{Vect}(e_2)$ et $E_4(A)=\mathrm{Vect}(e_3)$. En conséquence, si M est "une racine carrée" de la matrice A, les vecteurs e_2 et e_3 (deuxième et troisième vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$) sont vecteurs propres de M, donc M est de la forme $M=\begin{pmatrix}a&0&0\\b&d&0\\c&0&e\end{pmatrix}$. *On a donc ramené de neuf à cinq le nombre de coefficients indéterminés.* On calcule alors

$$M^2=\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0\\ (a+d)b & d^2 & 0\\ (a+e)c & 0 & e^2\end{pmatrix}\quad,\quad\text{donc}\quad M^2=A\iff\begin{cases} a^2=1 & (\mathbf{1})\\ d^2=1 & (\mathbf{2})\\ e^2=4 & (\mathbf{3})\\ (a+d)b=1 & (\mathbf{4})\\ (a+e)c=0 & (\mathbf{5})\end{cases}\ .$$

On a nécessairement $d=1$ ou $d=-1$ d'après $(\mathbf{2})$.

- Si $d=1$, alors nécessairement $a=1$ d'après $(\mathbf{1})$ et $(\mathbf{4})$, puis $b=\dfrac{1}{2}$ et $c=0$ (car $e=\pm 2$, donc $a+e\neq 0$), il y a alors deux matrices possibles

$$M_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad M_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\ .$$

- Si $d=-1$, alors nécessairement $a=-1$ d'après $(\mathbf{1})$ et $(\mathbf{4})$, puis $b=-\dfrac{1}{2}$ et $c=0$, il y a encore deux matrices possibles

$$M_3=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad M_4=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\ .$$

---

6. Soit F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles de limite nulle, soit f l'endomorphisme de F défini par $f(u)=v$ avec

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_n=u_{n+1}-u_n\ .$$

Déterminer les valeurs propres de f.

- -

Soient $u\in F$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a $f(u)=\lambda u$ si et seulement si, pour tout n entier naturel, $u_{n+1}=(\lambda+1)u_n$, autrement dit **ssi** u est une suite géométrique de raison $\lambda+1$, i.e. $u_n=C\,(\lambda+1)^n$ avec $C=u_0\in\mathbb{R}$. Il existe une suite non nulle vérifiant cette équation aux éléments propres $f(u)=\lambda u$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda+1)^n=0$, donc **ssi** $-2<\lambda<0$.

L'ensemble des valeurs propres de f est donc l'intervalle réel $]-2,0[$, et chaque sous-espace propre de f est une droite vectorielle: $\forall\lambda\in\,]-2,0[\quad E_\lambda(f)=\mathrm{Vect}\Big(\big((\lambda+1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}\Big)$.

7*. Soit l'espace vectoriel $E=\Big\{f\in\mathcal{C}\big(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}\big)\ \mid\ f(0)=0\Big\}$. Pour tout $f\in E$, on définit $\varphi(f):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ par

$$\varphi(f)(0)=0\qquad\text{et}\qquad\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad\varphi(f)(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Montrer que φ est un endomorphisme de E, puis déterminer ses valeurs propres.

- -

• La linéarité de φ résulte simplement de la linéarité de l'intégrale. Pour le caractère "endo", il faut s'assurer que la fonction $g = \varphi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Notons F la primitive de f qui s'annule en 0, et qui est donc définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, cette fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ (donc continue) sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit la continuité de $g = \varphi(f)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour la continuité de g en 0, notons que, pour x non nul, $g(x) = \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0}$ est un taux d'accroissement, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = F'(0) = f(0) = 0 = g(0)$, ce qu'il fallait vérifier. Finalement, $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

• Notons d'abord que le réel 0 n'est pas valeur propre de φ: en effet, si une fonction f de E vérifie $\varphi(f) = 0$, alors $F = 0$ sur $\mathbb{R}_+$ puis, par dérivation, $f = F' = 0$. L'endomorphisme φ est donc injectif.

• Un réel non nul λ est valeur propre de φ si et seulement s'il existe une fonction f de E, non nulle, telle que $\varphi(f) = \lambda f$, c'est-à-dire telle que (l'égalité étant trivialement vraie pour $x = 0$):

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\, x\, f(x)\ .$$

Si une telle fonction f existe, elle est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (*on le voit en isolant le* $f(x)$ *du second membre*), et elle vérifie sur cet intervalle l'équation différentielle $f'(x) = \dfrac{1-\lambda}{\lambda\, x}\, f(x)$ obtenue en dérivant, dont les solutions sont $f(x) = C\, x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$. Mais on a aussi $f(0) = 0$ et f doit être continue en 0, ce qui entraîne (avec $C \neq 0$ pour que f ne soit pas la fonction nulle) que l'exposant $\dfrac{1-\lambda}{\lambda}$ doit être strictement positif, i.e. $\lambda \in]0, 1[$.

Réciproquement, si $\lambda \in]0, 1[$, la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ pour $x > 0$, est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc appartient à E, n'est pas la fonction nulle, et vérifie $\varphi(f) = \lambda f$ (*vérification laissée à l'improbable lecteur*), donc λ est valeur propre de φ.

Conclusion. Les valeurs propres de φ sont les réels appartenant à l'intervalle $]0, 1[$. On peut préciser que les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

---

8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit $f \in \mathcal{L}(E)$, soit H un hyperplan de E, soit φ une forme linéaire sur E telle que $H = \operatorname{Ker}\varphi$.

a. Montrer que H est stable par f si et seulement s'il existe un scalaire λ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$.

b. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ les matrices de f et de φ dans une base $\mathcal{B}$ de E. Montrer que H est stable par f si et seulement si $L^\top$ est un vecteur propre de $A^\top$.

c. Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme f canoniquement représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

- -

a. Le sens indirect est immédiat: si $\varphi \circ f = \lambda\varphi$, alors si on prend $x \in H = \operatorname{Ker}\varphi$, on a $\varphi\big(f(x)\big) = \lambda\varphi(x) = 0$, donc $f(x) \in H$, et H est stable par f.

Supposons H stable par f et considérons la forme linéaire $\psi = \varphi \circ f$. L'hypothèse que H est stable par f se traduit par $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}\psi$. Si la forme linéaire ψ est nulle, on a bien $\varphi \circ f = \lambda\varphi$ avec $\lambda = 0$. Sinon, $\operatorname{Ker}\psi$ est aussi un hyperplan et on a alors $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$ car on a une inclusion et l'égalité des dimensions. Le cours indique que, dans ce cas, les formes linéaires (non nulles) φ et ψ sont proportionnelles, d'où l'existence d'un scalaire λ non nul tel que $\psi = \varphi \circ f = \lambda\varphi$.

b. La relation $\varphi \circ f = \lambda\varphi$ se traduit matriciellement, dans la base $\mathcal{B}$, par $LA = \lambda L$, soit $A^\top L^\top = \lambda L^\top$, qui signifie (puisque, la forme linéaire φ n'étant pas nulle, $L^\top$ n'est pas la matrice nulle) que $L^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un vecteur propre de la matrice carrée $A^\top$.

c. *Les détails des calculs sont laissés au lecteur.*

Il y a deux sous-espaces stables triviaux, qui sont $\{0\}$ de dimension 0, et $\mathbb{R}^3$ de dimension 3. Les droites vectorielles stables sont celles engendrées par les vecteurs propres (*cours*). On calcule donc le polynôme caractéristique $\chi_A = (X-1)(X-2)(X+1)$, il y a donc trois valeurs propres distinctes: $\operatorname{Sp}(A) = \{-1, 1, 2\}$, et les sous-espaces propres sont trois droites vectorielles: $E_{-1}(A) = \operatorname{Vect}\big((1,0,1)\big)$, $E_1(A) = \operatorname{Vect}\big((1,-1,1)\big)$ et $E_2(A) = \operatorname{Vect}\big((2,-1,1)\big)$. Ce sont alors les trois seules droites vectorielles stables par f.

Un plan P de $\mathbb{R}^3$ est stable par f si et seulement s'il est de la forme $P = \operatorname{Ker}\varphi$, où φ est une forme linéaire non nulle dont la matrice $L \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ est telle que $L^\top$ est vecteur propre de $A^\top$. Cherchons donc les vecteurs propres de $A^\top$: le polynôme caractéristique et les valeurs propres sont les mêmes que ceux de A, mais on obtient $E_{-1}(A^\top) = \operatorname{Vect}\big((0,1,1)\big)$, $E_1(A^\top) = \operatorname{Vect}\big((1,1,-1)\big)$ et $E_2(A^\top) = \operatorname{Vect}\big((1,0,-1)\big)$. Il y a donc trois plans vectoriels stables par f, qui sont les plans d'équations cartésiennes $y+z=0$, $x+y-z=0$ et $x-z=0$ respectivement.

Polynôme caractéristique.

9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible, soit $B = A^{-1}$. Quelle relation y a-t-il entre les polynômes caractéristiques χ_A et χ_B ?

- -

Pour $x \in \mathbb{K}$ non nul, on écrit

$$\begin{aligned}\chi_B(x) &= \det(xI_n - A^{-1}) = \det\left[A^{-1}(xA - I_n)\right] = \det(A^{-1}) \cdot x^n \cdot \det\left(A - \frac{1}{x}\, I_n\right) \\ &= \frac{x^n}{\det(A)}\,(-1)^n \det\left(\frac{1}{x}\, I_n - A\right) = \frac{(-1)^n\, x^n}{\det(A)}\,\chi_A\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^n}{\chi_A(0)}\,\chi_A\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Bien sûr, $\chi_B(0) = (-1)^n \det(A^{-1}) = \dfrac{(-1)^n}{\det(A)} = \dfrac{1}{\chi_A(0)}$.

Autrement dit, si $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, avec $a_0 = \chi_A(0) = (-1)^n \det(A)$, alors

$$\chi_B = \frac{1}{a_0}\left(a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + 1\right).$$

---

10. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice $M = \chi_A(B)$ est inversible si et seulement si $\operatorname{Sp}(A) \cap \operatorname{Sp}(B) = \emptyset$.

- -

Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice A (non nécessairement distinctes, chacune est comptée avec sa multiplicité), alors $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$, donc la matrice $M = \chi_A(B)$ a pour expression $M = \prod_{i=1}^{n}(B-\lambda_i I_n)$ (ce produit est évidemment commutatif puisqu'on multiplie entre elles des matrices qui sont des polynômes en la matrice B). Alors

$$\det(M) = \prod_{i=1}^{n}\det(B-\lambda_i\, I_n) = \prod_{i=1}^{n}(-1)^n\,\chi_B(\lambda_i) = (-1)^{n^2}\,\prod_{i=1}^{n}\chi_B(\lambda_i)\ .$$

On déduit que la matrice $M = \chi_A(B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible si et seulement si $\chi_B(\lambda_i) \neq 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, autrement dit si $\chi_B(\lambda) \neq 0$ pour tout λ valeur propre de A, autrement dit si aucune valeur propre de A n'est valeur propre de B, ce qui est bien la condition $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$.

---

11. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_n \end{pmatrix}$, $M'' = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -B & \lambda I_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. En effectuant les produits matriciels MM' et $M''M$, montrer que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique: $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

- -

On calcule $MM' = \begin{pmatrix} \lambda I_n - AB & A \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ et $M''M = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ 0_n & \lambda I_n - BA \end{pmatrix}$.

Les deux étant triangulaires supérieures par blocs, on déduit les relations

$$\det(MM') = \det(\lambda I_n - AB) = \chi_{AB}(\lambda)\ ,$$

$$\det(M''M) = \det(\lambda I_n)\ \det(\lambda I_n - BA) = \lambda^n\,\chi_{BA}(\lambda)\ .$$

Mais on a aussi $\det(MM') = \det(M)\ \det(M') = \det(M)$ et

$$\det(M''M) = \det(M'')\ \det(M) = \lambda^n\ \det(M) = \lambda^n\ \det(MM')\ .$$

On en déduit que $\lambda^n\,\chi_{BA}(\lambda) = \lambda^n\,\chi_{AB}(\lambda)$ pour tout scalaire λ, et donc que $\chi_{BA}(\lambda) = \chi_{AB}(\lambda)$ pour tout λ scalaire **non nul**. Les fonctions polynomiales χ_{AB} et χ_{BA} coïncident en une infinité de points, on conclut que $\chi_{BA} = \chi_{AB}$.

Diagonalisation (pratique).

12. Sans écrire aucun calcul, déterminer les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & -12 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

- -

La matrice A est visiblement de rang 1, donc le nombre 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé $E_0(A) = \mathrm{Ker}\,A$ est de dimension 2 (théorème du rang) : on voit par ailleurs que ce sous-espace est le plan d'équation cartésienne $x + 2y - 3z = 0$, une base est par exemple constituée des deux vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si A admet une autre valeur propre $\lambda \neq 0$, un vecteur propre associé appartient nécessairement à $\operatorname{Im} A$. *En effet, un tel vecteur X vérifie $AX = \lambda X$, soit $X = A \cdot \left(\dfrac{1}{\lambda} X\right) \in \operatorname{Im}(A)$.*

Or, $\operatorname{Im} A$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, et on vérifie que $AX_3 = 15X_3$, donc 15 est valeur propre de A et le sous-espace propre associé est $E_{15}(A) = \operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}(X_3)$. *On pouvait aussi utiliser la trace.*

En conclusion, $\operatorname{Sp}(A) = \{0 \,;\, 15\}$, la matrice A est diagonalisable, on a par exemple

$$A = PDP^{-1}\,, \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

---

13. Diagonaliser $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $a_{1,1} = 0$ et $a_{i,j} = 1$ si $(i,j) \neq (1,1)$.

- -

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & (1) & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 2. On a donc déjà $0 \in \operatorname{Sp}(A)$, si $n \geq 3$, avec un sous-espace propre $E_0(A) = \operatorname{Ker}(A)$ de dimension $n - 2$. Ce sous-espace propre est défini par les équations $\begin{cases} x_1 & = 0 \\ x_2 + \cdots + x_n & = 0 \end{cases}$, il admet pour base la famille de vecteurs $(e_2 - e_3, e_2 - e_4, \cdots, e_2 - e_n)$.

La recherche des valeurs propres non nulles conduit au système

$$\begin{cases} \phantom{x_1+{}} x_2 + \cdots + x_n = \lambda\, x_1 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \lambda\, x_2 \\ \cdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \lambda\, x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 + \cdots + x_n = \lambda\, x_1 \\ x_2 = \left(1 + \dfrac{1}{\lambda}\right) x_1 \\ \cdots \\ x_n = \left(1 + \dfrac{1}{\lambda}\right) x_1 \end{cases}$$

(on a retranché la première équation aux suivantes). En réinjectant dans la première équation, on obtient, pour $\lambda \neq 0$,

$$AX = \lambda\, X \iff \left\{ \left[\lambda^2 - (n-1)\,\lambda - (n-1)\right] x_1 = 0 \,;\; x_2 = x_3 = \cdots = x_n = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) x_1 \right\}.$$

Le réel non nul λ est donc valeur propre de A si et seulement s'il est solution de l'équation du second degré $\lambda^2 - (n-1)\,\lambda - (n-1) = 0$. Le discriminant $\Delta = (n-1)(n+3)$ est strictement positif, donc A admet deux valeurs propres non nulles $\lambda_1 = \dfrac{(n-1)-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{(n-1)+\sqrt{\Delta}}{2}$. Chacune d'elles ayant un sous-espace propre de dimension au moins 1, on en déduit déjà que A est diagonalisable, et que ces deux sous-espaces propres sont de dimension 1 exactement (*puisque la somme des dimensions des SEP est majorée par* n). La diagonalisation de A s'écrit enfin

$$A = PDP^{-1}\ , \quad \text{avec} \quad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, \cdots, 0) \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} n-1 & n-1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

---

14. Soient a, b, c des nombres complexes non nuls. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & c \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Quel est le rang de la matrice A ? Est-elle diagonalisable ?

- -

La matrice A est visiblement de rang 2 (deux colonnes indépendantes), donc $\operatorname{Ker} A$ est de dimension $n-2$: on a donc $0 \in \operatorname{Sp}(A)$ et le sous-espace propre associé $E_0(A) = \operatorname{Ker} A$ est de dimension $n-2$. Recherchons maintenant les valeurs propres **non nulles** en discutant le système d'écriture matricielle $AX = \lambda X$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Si λ est un complexe non nul, le système **(S)** : $AX = \lambda X$ s'écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} c\,x_n &=& \lambda\,x_1 \\ &\vdots& \\ c\,x_n &=& \lambda\,x_{n-1} \\ a\,x_1 + \cdots + a\,x_{n-1} + b\,x_n &=& \lambda\,x_n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x_1 = \cdots = x_{n-1} =& \dfrac{c}{\lambda}\,x_n \\ (n-1)\dfrac{ac}{\lambda}\,x_n + b\,x_n =& \lambda\ x_n \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} x_1 = \cdots = x_{n-1} =& \dfrac{c}{\lambda}\,x_n \\ \Big(\lambda^2 - b\,\lambda - (n-1)\,ac\Big)\,x_n =& 0 \end{array}\right. .$$

Remarquons que ce système **(S)** est toujours de rang au moins $n-1$ puisque les $n-1$ premières équations sont indépendantes ; les valeurs propres autres que 0 sont donc les complexes non nuls λ pour lesquels le système **(S)** est de rang exactement $n-1$, ce qui entraîne que les sous-espaces propres associés sont de dimension 1. Le nombre complexe non nul λ est valeur propre si et seulement si le système **(S)** a d'autres solutions que $X = 0$, c'est-à-dire si et seulement si λ est solution de l'équation du second degré $\lambda^2 - b\,\lambda - (n-1)ac = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = b^2 + 4(n-1)ac$.

Il y a donc deux cas possibles (discussion d'une équation du second degré à coefficients complexes!!) :

- si $\Delta = 0$, il y a une seule valeur propre autre que 0, avec un sous-espace propre de dimension 1 (*cf.* explication ci-dessus), la somme des dimensions des sous-espaces propres est alors $(n-2)+1 = n-1 < n$, donc A n'est pas diagonalisable ;

- si $\Delta \neq 0$, il y a deux valeurs propres autres que 0, et la somme des dimensions des sous-espaces propres est $(n-2)+1+1 = n$, donc A est diagonalisable.

En conclusion, A est diagonalisable si et seulement si $b^2 + 4(n-1)ac \neq 0$.

---

15. Soit $n \geq 3$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad a_{i,1} = a_{1,i} = a_{i,i} = 1 \qquad ; \qquad a_{i,j} = 0 \quad \text{sinon} .$$

a. Déterminer $\mathrm{rg}(A - I_n)$, calculer $\det(A)$ et $\mathrm{tr}(A)$.

b. Sans utiliser le polynôme caractéristique, déterminer les éléments propres de A, et montrer que A est diagonalisable.

- -

a. On a $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & (0) & \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix}$. La matrice $A - I_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$ est visiblement de rang 2. La trace de A est $\mathrm{tr}(A) = n$. Enfin, son déterminant se ramène à celui d'une matrice triangulaire supérieure par l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 - (C_2 + \cdots + C_n)$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & (0) & \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & (0) & \\ \vdots & (0) & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix} = 2 - n .$$

b. De $\mathrm{rg}(A - I_n) = 2$, on déduit que $E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_n)$ est de dimension $n-2$, donc le nombre 1 est valeur propre de A avec un sous-espace propre de dimension $n-2$. La multiplicité de la valeur propre 1 est donc au moins égale à $n-2$.

Si on considère A comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors son polynôme caractéristique est scindé (théorème de d'Alembert-Gauss), sa décomposition en produits de facteurs du premier degré est alors

$$\chi_A(X) = (X-1)^{n-2}\,(X - \lambda_1)\,(X - \lambda_2) ,$$

où λ_1 et λ_2 sont des nombres complexes sur lesquels on ne sait pour le moment rien (sont-ils réels ? sont-ils distincts ? sont-ils différents de 1 ? Quel suspense...). On sait alors que la trace et le déterminant sont la somme et le produit des valeurs propres, comptées avec leurs multiplicités, donc $\lambda_1\lambda_2 = \det(A) = 2 - n$ et $n - 2 + \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A) = n$, d'où

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \quad ; \qquad \lambda_1\lambda_2 = 2 - n .$$

Les nombres λ_1 et λ_2 sont donc solutions de l'équation $\lambda^2 - 2\lambda + 2 - n = 0$, ou encore $(\lambda - 1)^2 + 1 - n = 0$, ce qui donne $\{\lambda_1\ ,\ \lambda_2\} = \{1 - \sqrt{n-1}\ ,\ 1 + \sqrt{n-1}\}$.

La matrice A admet donc deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2, différentes de 1, toutes les deux simples, donc avec des sous-espaces propres associés de dimension 1 ; elle est donc diagonalisable puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est $(n-2)+1+1 = n$. *Remarque. Elle est aussi diagonalisable car elle est symétrique réelle.*

Recherchons maintenant les sous-espaces propres : on considère un réel λ avec $\lambda \neq 1$. Le système $AX = \lambda X$ s'écrit

$$\Big\{(1-\lambda)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \quad ; \quad x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0 \quad ; \quad \cdots \quad ; \quad x_1 + (1-\lambda)x_n = 0\Big\}$$

et se ramène à $\begin{cases} x_2 = \cdots = x_n = \dfrac{x_1}{\lambda - 1} \\ \Big(1 - \lambda + \dfrac{n-1}{\lambda-1}\Big)x_1 = 0 \end{cases}$. Le nombre λ est alors valeur propre si et seulement si ce système a des solutions X non nulles, c'est-à-dire si et seulement si $1 - \lambda + \dfrac{n-1}{\lambda - 1} = 0$ ou encore si et seulement si $(\lambda - 1)^2 + 1 - n = 0$, ce qui nous redonne bien les deux valeurs propres $\lambda_1 = 1 - \sqrt{n-1}$ et $\lambda_2 = 1 + \sqrt{n-1}$ obtenues ci-dessus. Le sous-espace propre $E_1(A)$ est de dimension $n-2$ et est défini par les équations $\{x_1 = 0\ ;\ x_2 + \cdots + x_n = 0\}$, il admet pour base la famille $(e_2 - e_3, e_2 - e_4, \cdots, e_2 - e_n)$. Les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(A)$ et $E_{\lambda_2}(A)$ sont des droites vectorielles engendrées respectivement par le vecteur $-\sqrt{n-1}\, e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ et par le vecteur $\sqrt{n-1}\, e_1 + e_2 + \cdots + e_n$. Finalement, $A = PDP^{-1}$, avec $D = \mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1, 1 - \sqrt{n-1}, 1 + \sqrt{n-1})$ et

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\sqrt{n-1} & \sqrt{n-1} \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & & & (0) & \vdots & \vdots \\ & -1 & & & \vdots & \vdots \\ (0) & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

---

16. Soit $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit P_n son polynôme caractéristique.

a. Calculer P_1 et P_2. Pour $n \geq 3$, exprimer P_n en fonction de P_{n-1} et P_{n-2}.

b. Soit $x \in\,]-2, 2[$. Montrer que

$$P_n(x) = \frac{\sin\big((n+1)\alpha\big)}{\sin(\alpha)}\ , \quad \text{avec} \quad \alpha = \mathrm{Arccos}\left(\frac{x}{2}\right).$$

c. En déduire que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

- -

a. On a $A_1 = (\,0\,)$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $P_1 = X$ et $P_2 = X^2 - 1$.

Un développement par rapport à la première colonne, puis un développement par rapport à la première ligne dans l'un des déterminants d'ordre $n-1$ obtenus, donnent

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & & (0) \\ -1 & x & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & x \end{vmatrix} = x\,P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)\ .$$

b. Puisque la réponse est donnée, contentons-nous de la vérifier par récurrence double: en posant donc $x = 2\cos(\alpha)$ avec $\alpha \in]0,\pi[$, on a bien

$$P_1(x) = x = 2\ \cos(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(\alpha)}\ ;$$

$$P_2(x) = x^2 - 1 = 4\ \cos^2(\alpha) - 1 = \frac{\sin(3\alpha)}{\sin(\alpha)}\ .$$

En effet,

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= \sin(2\alpha)\ \cos(\alpha) + \cos(2\alpha)\ \sin(\alpha) \\ &= 2\ \sin(\alpha)\ \cos^2(\alpha) + \big(2\ \cos^2(\alpha) - 1\big)\ \sin(\alpha) \\ &= \big(4\ \cos^2(\alpha) - 1\big)\ \sin(\alpha)\ . \end{aligned}$$

Et enfin, pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} 2\ \cos(\alpha)\ \frac{\sin(n\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\sin\big((n-1)\alpha\big)}{\sin(\alpha)} &= \frac{2\ \cos(\alpha)\ \sin(n\alpha) + \sin\big((n-1)\alpha\big)}{\sin(\alpha)} \\ &= \frac{\sin\big((n+1)\alpha\big) - \sin\big((n-1)\alpha\big) + \sin\big((n-1)\alpha\big)}{\sin(\alpha)} \\ &= \frac{\sin\big((n+1)\alpha\big)}{\sin(\alpha)}\ . \end{aligned}$$

La suite $\big(P_n(x)\big)_{n\geq 1}$ et la suite $\left(\dfrac{\sin\big((n+1)\alpha\big)}{\sin(\alpha)}\right)_{n\geq 1}$, ayant les mêmes deux premiers termes et vérifiant la même relation de récurrence double, coïncident donc.

c. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, posons $\alpha_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$ et $x_k = 2\cos(\alpha_k) = 2\ \cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$. On observe que

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \qquad P_n(x_k) = \frac{\sin\big((n+1)\alpha_k\big)}{\sin(\alpha_k)} = \frac{\sin(k\pi)}{\sin\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)} = 0\ .$$

Les réels x_k sont tous distincts car la fonction cosinus est strictement décroissante (donc injective) sur l'intervalle $[0,\pi]$. On a donc trouvé n valeurs propres distinctes de la matrice A, on sait donc qu'il n'y en a pas d'autres, et que A est diagonalisable avec

$$\mathrm{Sp}(A) = \left\{2\ \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\ ;\ 1 \leq k \leq n\right\}.$$

Les grincheux et les handicapés de la trigo pourront me faire observer que, s'il s'agissait simplement de montrer que A est diagonalisable, on pouvait se contenter de dire qu'elle est symétrique réelle. Ici, en prime, on a obtenu les valeurs propres. Cela valait bien un peu de calcul, non ?

---

17. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Combien y a-t-il de matrices M telles que $M^2 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? Et dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

- -

En commençant par la règle de Sarrus (même si cépabô), on obtient

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & -3 & 0 \\ -3 & x+2 & 1 \\ 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+2) - 9(x-1) - (x-1) \\ &= (x-1)\big[(x-1)(x+2) - 10\big] = (x-1)(x^2+x-12) \\ &= (x-1)(x-3)(x+4)\ . \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-4, 1, 3\}$. La matrice A admet trois valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, peu importe, le polynôme caractéristique étant scindé sur $\mathbb{R}$). On a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(-4, 1, 3)$ et $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ qu'il n'est pas utile d'expliciter. Si une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ vérifie $M^2 = A$, alors elle commute avec A, donc laisse stables les trois sous-espaces propres de la matrice A qui sont des droites vectorielles, ce qui entraîne que M est diagonalisable avec la même matrice de passage P, i.e. $M = P\Delta P^{-1}$ avec Δ diagonale. *En effet, notons $\mathcal{B} = (U, V, W)$ une base de $\mathbb{K}^3$ constituée de vecteurs propres de A, l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice M doit laisser stables les trois droites vectorielles* $\mathrm{Vect}(U)$, $\mathrm{Vect}(V)$, $\mathrm{Vect}(W)$, *donc doit aussi admettre U, V, W comme vecteurs propres, et donc doit être représenté dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice diagonale.* L'équation $M^2 = A$ se ramène alors à $\Delta^2 = D$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(a, b, c)$ diagonale. Cette dernière équation se ramène enfn au système $\begin{cases} a^2 = -4 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 3 \end{cases}$, qui n'a aucune solution si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,et qui en a huit si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. En remultipliant par les matrices de passage P et P^{-1}, on obtient 8 matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 = A$, et aucune dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

---

18. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, soient a et b deux réels distincts. Pour $P \in E$, on pose

$$\varphi(P) = (X-a)(X-b)P' - nXP\ .$$

Montrer que φ est un endomorphisme de E, et qu'il est diagonalisable.

- -

La linéarité de φ est immédiate. De plus, soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

- si $\deg(P) = d < n$, alors $\deg\big(\varphi(P)\big) \leq d+1 \leq n$, donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$;

- on calcule $\varphi(X^n) = n(X-a)(X-b)X^{n-1} - n\,X^{n+1}$, qui est de degré au plus n en constatant l'annihilation des termes en X^{n+1} ;

on déduit de tout cela que φ va bien de E dans E.

Dans la base $\mathcal{B} = \big(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\big)$, la matrice de φ est assez facile à écrire: en effet, après calculs, on a

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \qquad \varphi\big((X-a)^k\big) = (k-n)\,(X-a)^{k+1} + \big(k(a-b) - na\big)\,(X-a)^k\ ,$$

ce qui montre que la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est triangulaire inférieure, avec pour coefficients diagonaux les réels $k(a-b) - na$, $0 \leq k \leq n$, qui sont tous distincts. Donc φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes avec $\dim(E) = n+1$, donc φ est diagonalisable.

---

19. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Calculer A^2. La matrice A est-elle diagonalisable ? Préciser ses éléments propres.

- -

On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} -I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} = -I_{2n}$. Donc $P = X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de la matrice A. Ce polynôme étant scindé à racines simples (sur $\mathbb{C}$), on peut affirmer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, avec $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathcal{Z}(P) = \{-i, i\}$. On recherche alors les vecteurs propres $Z \in \mathbb{C}^{2n}$ sous la forme $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$; où $X \in \mathbb{C}^n$ et $Y \in \mathbb{C}^n$. Ainsi,

$$AZ = iZ \iff \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iX \\ iY \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -Y & = iX \\ X & = iY \end{cases} \iff Y = -iX\ .$$

Le sous-espace propre $E_i(A)$ est donc constitué de tous les vecteurs de $\mathbb{C}^{2n}$ de la forme $\begin{pmatrix} X \\ -iX \end{pmatrix}$, avec $X \in \mathbb{C}^n$. Ce sous-espace propre est isomorphe à $\mathbb{C}^n$, donc de dimension n.

De la même façon, le sous-espace propre $E_{-i}(A)$ est constitué de tous les vecteurs de $\mathbb{C}^{2n}$ de la forme $\begin{pmatrix} X \\ iX \end{pmatrix}$, avec $X \in \mathbb{C}^n$, il est aussi de dimension n.

Remarque. Le polynôme annulateur obtenu P n'ayant pas de racine réelle, la matrice A n'a pas de valeur propre réelle, et n'est donc évidemment pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Diagonalisation (théorie).

20. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes.

a. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Montrer que l'endomorphisme $f = P(u)$ est diagonalisable. A-t-il n valeurs propres distinctes?

b. Soit v un endomorphisme de E qui commute avec u. Montrer que tout vecteur propre de u est aussi vecteur propre de v. La réciproque est-elle vraie (tout vecteur propre de v est-il vecteur propre de u) ? Montrer que u et v sont codiagonalisables (i.e. diagonalisables dans une même base).

- -

a. L'endomorphisme u est diagonalisable (propriété de cours, condition suffisante). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u, soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres associées (distinctes par hypothèse), on a donc $u(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leq i \leq n$. Un calcul classique, fait en cours, montre alors que $f(e_i) = P(u)(e_i) = P(\lambda_i)\ e_i$. Les vecteurs e_i sont donc aussi vecteurs propres de l'endomorphisme f, mais pour la valeur propre $P(\lambda_i)$. On en déduit que l'endomorphisme $f = P(u)$ est aussi diagonalisable (puisque $\mathcal{B}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f) mais, une fonction polynomiale n'étant pas en général injective, il n'y a aucune raison pour que ses valeurs propres $P(\lambda_i)$ soient distinctes. *Par exemple, si P est un polynôme constant $P = \alpha$, alors $f = \alpha\,\mathrm{id}_E$ est une homothétie et a une seule valeur propre, α.*

b. • On sait que les sous-espaces propres de u sont stables par v. Mais ces sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont des droites vectorielles. Cela signifie donc qu'elles sont engendrées par un vecteur qui est aussi vecteur propre de v. Reprenons les choses autrement, en réutilisant les notations introduites dans le **a.**: soit x un vecteur propre de u, alors x appartient à l'un des sous-espaces propres de u, mais ces SEP sont les droites vectorielles $E_{\lambda_i}(u) = \mathrm{Vect}(e_i)$, on a donc $x = \alpha\, e_i$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$. Comme $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v, on a $v(x) \in E_{\lambda_i}(u)$, ce qui signifie que $v(x)$ est colinéaire à e_i, donc $v(x) = \beta e_i$ avec $\beta \in \mathbb{K}$. Donc $v(x) = \dfrac{\beta}{\alpha} x$ est colinéaire à x, ce qui signifie que x est aussi un vecteur propre de v.

• La réciproque est fausse: si on prend par exemple $v = \mathrm{id}_E$, alors v commute avec u, mais tout vecteur de E (non nul, en toute rigueur) est vecteur propre de v, alors qu'ils ne sont pas tous vecteurs propres de u.

• On vient de voir que $\mathcal{B}$ est une base de E constituée de vecteurs propres communs à u et à v. Dans cette base, les endomorphismes u et v sont tous deux représentés par des matrices diagonales.

---

21. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant la relation $2A^3 + 3A^2 + 6A - I_n = 0$.

a. Montrer que A est inversible.

b. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

c. Montrer que $\det(A) > 0$.

- -

a. La relation donnée peut s'écrire sous la forme $(2A^2 + 3A + 6I_n)\,A = I_n$ et montre que la matrice A est inversible, avec

$$A^{-1} = 2A^2 + 3A + 6I_n\ .$$

b. Soit le polynôme $P = 2X^3 + 3X^2 + 6X - 1$. Étudions la fonction polynomiale f associée à P (sur $\mathbb{R}$) : on a $f'(x) = 6(x^2 + x + 1)$ donc, le trinôme $x^2 + x + 1$ n'ayant pas de racine réelle, on a $f'(x) > 0$ pour tout réel x. La fonction polynomiale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donc (continue et) strictement croissante, par ailleurs $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc la fonction f établit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, le nombre 0 admet alors un unique antécédent α (*comme* $f(0) = -1 < 0$, *on peut préciser que* $\alpha > 0$). De cette étude, il résulte que le polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ admet une unique racine réelle α (simple puisque $P'(\alpha) \neq 0$), et admet donc deux racines complexes (non réelles) conjuguées β et $\overline{\beta}$. Finalement, dans $\mathbb{C}$, le polynôme P a trois racines distinctes : c'est un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$. La matrice A, considérée comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, admet donc un polynôme annulateur scindé à racines simples, elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

c. On peut écrire $A = QDQ^{-1}$, avec $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale, et alors $\det(A) = \det(D)$ est le produit des coefficients diagonaux de la matrice D, c'est-à-dire le produit des valeurs propres de A, comptées avec leur multiplicité. Le polynôme $P = 2(X-\alpha)(X-\beta)(X-\overline{\beta})$ étant annulateur de A, on a $\mathrm{Sp}(A) \subset \{\alpha\ ,\ \beta\ ,\ \overline{\beta}\}$. Notons r et s les multiplicités respectives des valeurs propres α et β (*en convenant qu'un de ces deux nombres peut être nul si jamais* α *et* β *ne sont pas tous deux effectivement valeurs propres*); alors la valeur propre $\overline{\beta}$ a aussi pour multiplicité s (*le polynôme caractéristique* χ_A *de la matrice* A *est à coefficients réels, donc si* β *est racine de* χ_A*, alors* $\overline{\beta}$ *est aussi racine de* χ_A *avec la même multiplicité*). Finalement,

$$\det(A) = \alpha^r\ \beta^s\ \overline{\beta}^s = \alpha^r\ |\beta|^{2s}$$

et ce nombre est un réel strictement positif puisque $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{C}^*$ donc $|\beta| \in \mathbb{R}_+^*$.

---

22. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit u un endomorphisme de E. On suppose que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Im}(u + \mathrm{id}_E) = \{0_E\}$. Montrer que u est diagonalisable. Donner une interprétation géométrique de u.

- -

Remarquons d'abord que, dans un espace vectoriel E *de dimension finie* n*, si* m *sous-espaces* $E_1, \cdots, E_m$ *sont en somme directe, alors la somme de leurs dimensions ne peut dépasser* n *: en effet,* $S = \sum_{i=1}^{m} E_i = \bigoplus_{i=1}^{m} E_i$ *est alors un sous-espace vectoriel de* E*, de dimension* $\dim S = \sum_{i=1}^{m} \dim E_i \leq \dim E = n$*.*

Notons $n = \dim E$, $p = \dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$, $q = \dim \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_E)$. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_E)$ sont en somme directe d'après le cours (ce sont deux sous-espaces propres de u pour des valeurs propres distinctes), on a donc $p + q \leq n$ d'après la remarque ci-dessus.

L'hypothèse de l'énoncé est que les sous-espaces $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}(u + \mathrm{id}_E)$ sont aussi en somme directe, on peut donc tenir le même raisonnement : la somme de leurs dimensions ne peut dépasser n. Avec le théorème du rang, cela donne $(n-p)+(n-q) \leq n$, soit $p+q \geq n$.

On a donc $p + q = n$ (*on a trouvé deux sous-espaces propres de* E *dont la somme des dimensions vaut la dimension de* E), ce qui prouve que u est diagonalisable et ne peut avoir d'autres valeurs propres que 1 et -1 : l'endomorphisme u est une symétrie, par rapport à $F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et suivant la direction de $G = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id}_E)$.

Remarque. On a donc $u^2 = \mathrm{id}_E$, soit encore $(u-\mathrm{id}_E)\circ(u+\mathrm{id}_E) = (u+\mathrm{id}_E)\circ(u-\mathrm{id}_E) = 0$, d'où l'inclusion $\mathrm{Im}(u+\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E)$ puis l'égalité de ces deux sous-espaces (car égalité des dimensions). Finalement,

$$\mathrm{Im}(u-\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(u+\mathrm{id}_E) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(u+\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E)\ .$$

---

23. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, soit $f : M \mapsto \mathrm{tr}(A)\, M - \mathrm{tr}(M)\, A$.

a. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Préciser le noyau de f.

c. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

- -

a. La linéarité de f résulte de la linéarité de la trace.

b. Si $M \in \mathrm{Ker}\, f$, alors $M = \dfrac{\mathrm{tr}(M)}{\mathrm{tr}(A)}\, A$, donc M est colinéaire à A, on en déduit déjà l'inclusion $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Vect}(A)$. Enfin, on constate que $f(A) = 0$, donc $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(A)$.

c. On vient de montrer que le nombre 0 est valeur propre de f, le sous-espace propre associé $\mathrm{Ker}\, f$ étant de dimension 1. Par ailleurs l'équation aux éléments propres $f(M) = \lambda M$ peut se réécrire sous la forme $(\mathrm{tr}A - \lambda)\, M = (\mathrm{tr}M)\, A$, ce qui entraîne que, soit $\lambda = \mathrm{tr}A$, soit M est colinéaire à A. La seule valeur propre possible autre que 0 est donc le réel $\mathrm{tr}A$, et on constate alors que

$$f(M) = (\mathrm{tr}A)\, M \iff \mathrm{tr}(M) = 0\ ,$$

autrement dit le sous-espace propre de f associé à la valeur propre $\mathrm{tr}(A)$ est l'hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices de trace nulle, donc de dimension $n^2 - 1$. La somme des dimensions des sous-espaces propres de f est $n^2 = \dim\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$, donc f est diagonalisable.

24*. Soit une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} 1 & & & (\times) \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & n \end{pmatrix}$, i.e. M est triangulaire supérieure avec $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ sur la diagonale. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M. On note $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a. Montrer que f est diagonalisable.

b. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} E_i(f)$.

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = M$. Montrer que A est triangulaire supérieure.

- -

a. L'endomorphisme f admet n valeurs propres distinctes (ce sont les coefficients diagonaux $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ puisque sa matrice est triangulaire), donc il est diagonalisable (*condition suffisante du cours*).

b. Les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles, et comme ils sont en somme directe, on a $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{k} E_i(f)\right) = k$. On a aussi $\dim\left(\mathrm{Vect}(e_1,\cdots,e_k)\right) = k$. Il reste donc a prouver une inclusion. Posons $V_k = \mathrm{Vect}(e_1,\cdots,e_k)$, ce sous-espace est stable par f (cela résulte du caractère triangulaire supérieur de la matrice) et l'endomorphisme induit f_{V_k} est représenté, dans la base $(e_1,\cdots,e_k)$, par une matrice extraite de M de la forme $\begin{pmatrix} 1 & & & (\times) \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & k \end{pmatrix}$, cet endomorphisme induit f_{V_k} admet donc pour valeurs propres les entiers 1, 2, $\cdots$, k. Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, le sous-espace V_k contient donc un vecteur propre de f_{V_k} (donc de f) pour la valeur propre i, il contient donc $E_i(f)$ puisque ce sous-espace propre est de dimension 1, et finalement il contient la somme des $E_i(f)$, pour i de 1 à k.

On a obtenu l'inclusion recherchée, on peut conclure que $V_k = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i(f)$.

c. Si $A^2 = M$, alors l'endomorphisme a canoniquement associé à A vérifie $a^2 = f$, donc il commute avec f, puis il laisse stables les sous-espaces propres de f, il laisse donc stables les V_k qui sont des sommes de sous-espaces propres de f. Cela signifie que la matrice de a dans la base $(e_1,\cdots,e_n)$, autrement dit la matrice A, est triangulaire supérieure.

---

25. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

a. Montrer l'implication

$$\mathrm{rg}(u) \leq 1 \implies \forall a \in \mathbb{K} \quad \det(\mathrm{id}_E + a\,u) = 1 + a\,\mathrm{tr}(u)\ .$$

b. La réciproque est-elle vraie ? Est-elle vraie si l'on suppose de plus u diagonalisable ?

- -

a. Si $\mathrm{rg}(u) = 0$, alors $u = 0$ et l'égalité à prouver est évidente. Si $\mathrm{rg}(u) = 1$, alors $\mathrm{Ker}\,u$ est de dimension $n-1$, soit $(e_1,\cdots,e_{n-1})$ une base de $\mathrm{Ker}\,u$, on la complète en une base $\mathcal{B} = (e_1,\cdots,e_{n-1},e_n)$ de E dans laquelle l'endomorphisme u est représenté par une matrice de la forme $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_n \end{pmatrix}$ (les $n-1$ premières colonnes sont nulles).

Comme M est alors triangulaire supérieure, les calculs sont immédiats :

$$\forall a \in \mathbb{K} \qquad \det(\mathrm{id}_E + a\,u) = \det(I_n + a\,M) = 1 + a\,c_n = 1 + a\,\mathrm{tr}(M) = 1 + a\,\mathrm{tr}(u)\ .$$

b. • Sans autre hypothèse, la réciproque est fausse : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang $n-1 > 1$, et pourtant $\det(I_n + aM) = 1 + a\,\mathrm{tr}(M) = 1$ pour tout scalaire a.

• Soit u un endomorphisme de E tel que $\forall a \in \mathbb{K} \quad \det(\mathrm{id}_E + a\, u) = 1 + a\,\mathrm{tr}(u)$. Alors, pour tout scalaire x non nul, on a

$$\chi_u(x) = \det(x\ \mathrm{id}_E - u) = x^n\ \det\left(\mathrm{id}_E - \frac{1}{x}\ u\right) = x^n\ \left(1 - \frac{1}{x}\ \mathrm{tr}(u)\right) = x^{n-1}(x - \mathrm{tr}\, u)\ .$$

Un tel endomorphisme admet donc 0 pour valeur propre de multiplicité au moins égale à $n-1$. Si l'on suppose de plus cet endomorphisme diagonalisable, alors le sous-espace propre $E_0(u) = \mathrm{Ker}\, u$ est de dimension au moins $n-1$, donc $\mathrm{rg}(u) \leq 1$. La réciproque est donc vraie avec l'hypothèse supplémentaire que u est diagonalisable.

---

26. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

a. Démontrer la relation $A^2 = \mathrm{tr}(A) \cdot A$.

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

c. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$.

- -

a. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, $\mathrm{rg}(u) = 1$, donc $\dim(\mathrm{Ker}\, u) = n-1$, il existe donc une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ dont les $n-1$ premiers vecteurs appartiennent à $\mathrm{Ker}\, u$; dans une telle base, l'endomorphisme u est alors représenté par une matrice M dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles, soit $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$.

La matrice M est alors semblable à A. On vérifie facilement que

$$M^2 = a_n\, M = \mathrm{tr}(M) \cdot M = \mathrm{tr}(A) \cdot M$$

(puisque deux matrices semblables ont la même trace), on en déduit $A^2 = \mathrm{tr}(A) \cdot A$.

b. Le réel 0 est valeur propre de la matrice A (ou de la matrice M, cela revient au même), et le sous-espace propre associé $\mathrm{Ker}\, A$ est de dimension $n-1$. Comme A est semblable à M qui est triangulaire supérieure, les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux de M, d'où la discussion :

• si $\mathrm{tr}(A) = 0$, i.e. si $a_n = 0$, alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ et, le seul sous-espace propre étant de dimension $n-1$, la matrice A n'est pas diagonalisable ;

• si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, i.e. si $a_n \neq 0$, alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0, a_n\}$, il y a alors un autre sous-espace propre (qui est nécessairement de dimension 1), donc A est diagonalisable.

En conclusion, une matrice de rang un est diagonalisable **si et seulement si** sa trace est non nulle.

c. Reprenons les deux cas mentionnés ci-dessus :

• si $\mathrm{tr}(A) = 0$, i.e. si $a_n = 0$, on a $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{n-1})$ et $\mathrm{Im}\, u$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $a_1 e_1 + \cdots + a_{n-1} e_{n-1}$ qui appartient donc à $\mathrm{Ker}\, u$, on a donc $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$, soit $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(A)$, et ces deux sous-espaces ne sont pas supplémentaires.

• si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, i.e. si $a_n \neq 0$, alors $\mathrm{Ker}\, u$ est toujours l'hyperplan engendré par les vecteurs e_1, $\cdots$, e_{n-1}, alors que $\mathrm{Im}\, u$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur

$x = a_1e_1 + \cdots + a_{n-1}e_{n-1} + a_ne_n$ n'appartenant pas à $\operatorname{Ker} u$, donc $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont supplémentaires.

Bilan : Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrice de rang 1, on a les équivalences

$$A \text{ diagonalisable} \iff \operatorname{tr}(A) \neq 0 \iff \mathbb{K}^n = \operatorname{Ker}(A) \oplus \operatorname{Im}(A)\ .$$

27.a. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A et B sont diagonalisables.

b. Diagonaliser la matrice $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -2A & 3A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

- -

a. • Si A et B sont diagonalisables, alors on a $A = P_1D_1P_1^{-1}$ et $B = P_2D_2P_2^{-1}$, avec $P_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $P_2 \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, D_1 et D_2 diagonales d'ordres n et p respectivement. On vérifie alors que $M = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+p}(\mathbb{K})$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{pmatrix}$, et $D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$ est diagonale d'ordre $n+p$, donc M est diagonalisable.

• Réciproquement, si M est diagonalisable, alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples tel que $P(M) = 0$. On vérifie que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$, et on en déduit que $0 = P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$. Le polynôme P (scindé à racines simples) est donc annulateur pour A et pour B ; ces deux dernières matrices sont donc diagonalisables.

b. On a $\mathrm{Sp}(G) = \{1\ ;\ 2\}$, $E_1(G) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2(G) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $G = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\ . \qquad \textbf{(*)}$$

c. Je laisse le lecteur vérifier, en effectuant un produit matriciel par blocs analogue au calcul **(*)**, que

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -2A & 3A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}\ ,$$

la matrice $\begin{pmatrix} 2I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$ étant l'inverse de $\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix}$. Ainsi, M est semblable à $M' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$, donc M est diagonalisable si et seulement si M' est diagonalisable, donc si et seulement si A et $2A$ sont diagonalisables (d'après **a.**), autrement dit si et seulement si A est diagonalisable.

---

28. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^5 = M^2$, et $\operatorname{tr}(M) = n$. Montrer que $M = I_n$.

- -

Le polynôme $P = X^5 - X^2$ est annulateur de M, mais ce polynôme $P = X^2(X^3 - 1) = X^2(X-1)(X-j)(X-j^2)$ est scindé, mais pas à racines simples. On peut toutefois en déduire que $\operatorname{Sp}(M) \subset Z(P) = \{0, 1, j, j^2\}$. Rappelons que $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Notons a, b, c, d les multiplicités respectives des valeurs propres 0, 1, j et j^2 (en convenant que, si l'un de ces nombres n'est pas valeur propre de M, on le compte avec une multiplicité nulle). Alors la trace de M est la somme des valeurs propres comptées avec leur multiplicité, soit $b + jc + j^2 d = n$. En prenant les parties réelle et imaginaire, on déduit $n = b - \dfrac{1}{2}(c+d)$ et $0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(c-d)$, d'où $c = d$ et $n = b - c$. Mais les multiplicités sont des entiers naturels au plus égaux à n, on a donc $b \leq n$ mais aussi $b = n + c \geq n$, donc finalement $b = n$. Comme ce sont des entiers naturels dont la somme vaut n, il en résulte $a = c = d = 0$.

Finalement, la seule valeur propre de M est 1, de multiplicité n. Comme $0 \notin \operatorname{Sp}(M)$, la matrice M est inversible. La relation $M^5 = M^2$ peut donc se "simplifier" en $M^3 = I_n$ (en multipliant, par exemple à gauche, par $(M^{-1})^2$), la matrice M admet donc aussi pour polynôme annulateur le polynôme $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ qui, lui, est scindé à racines simples. Donc M est diagonalisable avec 1 pour seule valeur propre. Donc $M = I_n$.

29*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **commutant** de A l'ensemble des matrices qui commutent avec A, soit

$$\mathcal{C}(A) = \big\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA \big\} .$$

a. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b. On suppose A diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ avec les multiplicités $m_1, \cdots, m_k$. Montrer qu'une matrice M commute avec A si et seulement si l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M laisse stables les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(A)$, $1 \leq i \leq k$. En déduire la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(A)$.

c. On suppose dans cette question que A admet n valeurs propres distinctes. Montrer que la famille $(I_n, A, A^2, \cdots, A^{n-1})$ est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(A)$.

- -

---

30. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim(E) = n$. On suppose qu'il existe n hyperplans $H_1, \cdots, H_n$ de E, stables par u et tels que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} H_i = \{0\}$. Montrer que u est diagonalisable.

On pourra s'intéresser aux sous-espaces $D_i = \displaystyle\bigcap_{j \neq i} H_j$, *avec* $1 \leq i \leq n$.

- -

Les D_i sont des droites vectorielles. En effet, chaque hyperplan H_i est le noyau d'une forme linéaire non nulle φ_i sur E. On a alors $D_i = \bigcap_{j\neq i} \mathrm{Ker}(\varphi_j) = \mathrm{Ker}(\psi_i)$ avec

$$\psi_i \ : \ \begin{cases} E \ \to \ \mathbb{K}^{n-1} \\ x \ \mapsto \ \big(\varphi_1(x), \cdots, \varphi_{i-1}(x), \varphi_{i+1}(x), \cdots, \varphi_n(x)\big) \end{cases} .$$

Comme $\mathrm{Im}(\psi_i) \subset \mathbb{K}^{n-1}$, on a $\mathrm{rg}(\psi_i) \leq n-1$, et le théorème du rang donne

$$\dim(D_i) = \dim(\mathrm{Ker}\,\psi_i) = \dim(E) - \mathrm{rg}(\psi_i) \geq n - (n-1) = 1 .$$

D'autre part, $H_i \cap D_i = \{0_E\}$ donc, par la formule de Grassmann,

$$\dim(D_i) = \dim(H_i \cap D_i) + \dim(H_i + D_i) - \dim(H_i) \leq 0 + n - (n-1) = 1$$

puisque $H_i + D_i$ est un s.e.v. de E. Finalement, $\dim(D_i) = 1$ pour tout i.

Chaque droite vectorielle D_i est stable par u puisqu'elle est une intersection de sous-espaces stables par u, on peut donc écrire $D_i = \mathrm{Vect}(e_i)$ où e_i est un vecteur propre de u.

Enfin, la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E. En effet, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $e_i \in D_i = \bigcap_{j\neq i} \mathrm{Ker}(\varphi_j)$, donc $\varphi_j(e_i) = 0$ si $j \neq i$. Si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont des scalaires tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$, alors en fixant un indice $j \in [\![1, n]\!]$ et en appliquant la forme linéaire φ_j, on obtient $\lambda_j\, \varphi_j(e_j) = 0$, avec $\varphi_j(e_j) \neq 0$ (*si on avait* $\varphi_j(e_j) = 0$, *alors* $e_j \in \bigcap_{i=1}^{n} H_i = \{0_E\}$, *ce qui est absurde*), donc chaque λ_j est nul. La famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est donc libre et, comme elle est de cardinal n, c'est une base de E, qui est constituée de vecteurs propres de u, donc u est diagonalisable.

31*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = -I_n$. Montrer que l'entier n est nécessairement pair ($n = 2p$), et que A est semblable à la matrice diagonale par blocs $M = \mathrm{diag}(C, C, \cdots, C)$, en posant $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- -

En "passant aux déterminants", on obtient $(\det A)^2 = \det(-I_n) = (-1)^n$. Sur $\mathbb{R}$, ceci n'est possible que si n est pair, posons donc $n = 2p$. Le polynôme $Q = X^2 + 1$ est annulateur de la matrice A. Comme $Q = (X - i)(X + i)$, on déduit que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{i, -i\}$ et que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ puisque Q est alors scindé à racines simples. Par ailleurs, la matrice A étant réelle, ses valeurs propres conjuguées i et $-i$ ont la même multiplicité (puisque ce sont les multiplicités en tant que racines du polynôme caractéristique χ_A, qui est dans $\mathbb{R}[X]$). Donc i et $-i$ sont toutes deux de multiplicité $p = \dfrac{n}{2}$. Sur $\mathbb{C}$, la matrice A est donc semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} iI_p & 0 \\ 0 & -iI_p \end{pmatrix}$, ou encore, en réordonnant différemment, à la matrice diagonale $\Delta = \mathrm{diag}(D, D, \cdots, D)$, avec p blocs diagonaux $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. On a donc $A = P\Delta P^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Enfin, la matrice diagonale D est semblable à la matrice $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *En effet, si l'on repart de cette matrice C, elle a pour polynôme caractéristique $Q = X^2 + 1$, donc elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ avec i et $-i$ comme valeurs propres simples.* Par de classiques calculs de produits par blocs, on déduit que la matrice $\Delta = \mathrm{diag}(D, D, \cdots, D)$ est semblable à la matrice $M = \mathrm{diag}(C, C, \cdots, C)$. Par transitivité de la relation de similitude des matrices, on déduit que A est semblable à M, autrement dit il existe $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = RMR^{-1}$.

Enfin, on peut montrer (*mais est-ce vraiment demandé ?*) qu'il est possible de choisir $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En effet, deux matrices réelles qui sont "semblables sur $\mathbb{C}$" sont aussi "semblables sur $\mathbb{R}$". Pour cela, posons $R = S + iT$, où S et T sont deux matrices réelles. On a la relation $AR = RM$ qui s'écrit $AS + iAT = SM + iTM$, puis en séparant partie réelle et partie imaginaire, $AS = SM$ et $AT = TM$. Si l'une des deux matrices S ou T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, c'est fini, on a bien montré que A et M sont "semblables sur $\mathbb{R}$". Si aucune des deux n'est inversible, on n'a vraiment pas de chance! Mais tout n'est pas désespéré car, on a aussi $A(S + \lambda T) = (S + \lambda T)M$ pour tout réel λ et les réels λ pour lesquels la matrice réelle $S + \lambda T$ est non inversible sont en nombre fini puisque ce sont les racines de la fonction polynomiale $x \mapsto \det(S + xT)$, il existe donc des λ réels pour lesquels cette matrice $S + \lambda T$ est inversible, et c'est gagné! Youpi!

---

32. Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $n \geq 2$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\varphi(P)(X) = (X - a)\big(P'(X) - P'(a)\big) - 2\big(P(X) - P(a)\big) .$$

a. Montrer que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Déterminer ses valeurs propres. Est-il diagonalisable ? *On pourra utiliser le fait que la famille $\mathcal{B} = \big(1, X - a, (X - a)^2, \cdots, (X - a)^n\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.*

- -

a. On observe que $\deg\big(\varphi(P)\big) \leq \deg(P)$ pour tout polynôme P, donc φ va bien de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même. Enfin, la linéarité de φ est immédiate.

b. On calcule $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X - a) = -2(X - a)$ et, pour $k \geq 2$, $\varphi\big((X - a)^k\big) = (k - 2)\,(X - a)^k$. On a donc immédiatement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \mathrm{diag}(0, -2, 0, 1, 2, 3, \cdots, n - 2)$, donc φ est diagonalisable. Ses valeurs propres sont donc le nombre -2 et les entiers de 0 à $n - 2$, soit $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{-2, 0, 1, 2, \cdots, n - 2\}$, la valeur propre 0 étant double.

---

33. Soient A, B, M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec A et B diagonalisables. On suppose qu'il existe p et q entiers naturels tels que $A^p M B^q = 0$. Montrer que $AMB = 0$.

- -

Posons $A = PDP^{-1}$ et $B = Q\Delta Q^{-1}$ avec P et Q inversibles, D et Δ diagonales. L'hypothèse $A^p M B^q = 0$ s'écrit $PD^pP^{-1}MQ\Delta^q Q^{-1} = 0$ puis $D^p N \Delta^q = 0$ avec $N = P^{-1}MQ$. En explicitant $N = (n_{i,j})$, $D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$, $\Delta = \mathrm{diag}(\delta_1, \cdots, \delta_n)$, cela donne pour tout (i, j), la relation $d_i^p n_{i,j} \delta_j^q = 0$. Mais cette relation entraîne que l'un au moins des trois facteurs scalaires d_i^p, $n_{i,j}$ ou δ_j^q soit nul, ce qui entraîne alors $d_i n_{i,j} \delta_j = 0$. Ceci étant vrai pour tout couple (i, j), on a prouvé que $DN\Delta = 0$, d'où l'on tire $AMB = 0$.

---

34. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

a. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \qquad P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)\,B \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix} .$$

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit diagonalisable.

- -

a. Par une récurrence immédiate, on a $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et, par convention, $M^0 = I_{2n} = \begin{pmatrix} A^0 & 0_n \\ 0_n & A^0 \end{pmatrix}$. Puis, si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, alors

$$P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k A^k & \displaystyle\sum_{k=1}^{d} kA^{k-1}B \\ 0_n & \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)\,B \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix} .$$

b. Supposons M diagonalisable, soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé à racines simples tel que $P(M) = 0_{2n}$. On a alors $P(A) = 0_n$ ce qui entraîne que A est diagonalisable, donc A est semblable à $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. On a alors aussi $P'(A)\,B = 0_n$, et $P'(A)$ est semblable à $\mathrm{diag}\big(P'(\lambda_1), \cdots, P'(\lambda_n)\big)$. Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(\lambda_i) = 0$, donc $P'(\lambda_i) \neq 0$ puisque les racines de P sont simples. On en déduit que la matrice $P'(A)$ est inversible, et enfin que $B = 0_n$.

Inversement, si A est diagonalisable et B nulle, il est immédiat que M est diagonalisable.

Bilan. M est diagonalisable **si et seulement si** A est diagonalisable et $B = 0_n$.

---

35. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A^2 + A - I_n = 0$. Montrer que $\det(A) = 1$.

- -

Le polynôme annulateur $P = X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)(X-i)(X+i)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. De plus, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{1, i, -i\}$. On a alors $\det(A) = 1^\alpha\, i^\beta\, (-i)^\gamma$, où α, β, γ sont les multiplicités respectives des valeurs propres 1, i et $-i$. La matrice A étant réelle, on a $\beta = \gamma$: en effet, le polynôme caractéristique χ_A est lui-même à coefficients réels, donc admet les racines complexes conjuguées i et $-i$ avec la même multiplicité. Finalement, $\det(A) = i^\beta\, (-i)^\beta = \big[i \times (-i)\big]^\beta = 1$.

36*. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer l'équivalence

$$f \text{ est diagonalisable} \iff f^2 \text{ est diagonalisable et } \mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f) .$$

- -

Le sens direct est facile: si l'endomorphisme f est diagonalisable, alors il est représenté dans une certaine base $\mathcal{B}$ de E par une matrice diagonale D, l'endomorphisme f^2 est alors représenté par la matrice D^2 qui est aussi diagonale, et de même rang que D (puisque le rang d'une matrice diagonale est le nombre de coefficients diagonaux non nuls), on a donc $\mathrm{rg}(f^2) = \mathrm{rg}(f)$ puis $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$ car on connaît l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et on a égalité des dimensions par le théorème du rang.

Réciproquement, si f^2 est diagonalisable, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes et non nulles. Le polynôme $P = X \displaystyle\prod_{k=1}^{m}(X - \lambda_k)$ annule alors f^2, donc le polynôme Q défini par $Q(X) = P(X^2) = X^2 \displaystyle\prod_{k=1}^{m}(X^2 - \lambda_k)$ annule f puisque $Q(f) = P(f^2) = 0$. Mais chaque nombre complexe non nul λ_k, $1 \leq k \leq m$, admet dans $\mathbb{C}$ deux racines carrées distinctes (et opposées) α_k et $-\alpha_k$, ce qui permet de factoriser Q en

$$Q = X^2 \prod_{k=1}^{m} \big[(X - \alpha_k)(X + \alpha_k)\big] = X^2\, R\ , \text{ avec } \quad R(X) = \prod_{k=1}^{m} \big[(X - \alpha_k)(X + \alpha_k)\big]\ .$$

On a donc $0 = Q(f) = f^2 \circ R(f)$, ce qui se traduit par l'inclusion $\mathrm{Im}\big(R(f)\big) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$. Si l'on suppose $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$, on a donc aussi l'inclusion $\mathrm{Im}\big(R(f)\big) \subset \mathrm{Ker}(f)$, laquelle se traduit de nouveau par $f \circ R(f) = 0$. L'endomorphisme f admet donc pour polynôme annulateur le polynôme XR, qui est scindé à racines simples. Donc f est diagonalisable.

37*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}\left((A - \lambda I_n)^2\right)\ .$$

- -

• Supposons A diagonalisable, soit $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et D diagonale. Alors, pour tout λ complexe, les matrices $A - \lambda I_n = P(D - \lambda I_n)D^{-1}$ et $D - \lambda I_n$ sont semblables, donc ont le même rang, qui est aussi celui de $(D - \lambda I_n)^2$ (*puisque le rang d'une matrice diagonale est le nombre de coefficients diagonaux non nuls, qui est le même pour le carré de cette matrice*), qui est enfin celui de $(A - \lambda I_n)^2$ *puisque* $(A - \lambda I_n)^2$ *et* $(D - \lambda I_n)^2$ *sont semblables*. Par le théorème du rang, on déduit que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ et $\mathrm{Ker}\left((A - \lambda I_n)^2\right)$ ont la même dimension. Comme le premier est inclus dans le deuxième, ils sont alors égaux.

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}\left((A - \lambda I_n)^2\right)$. On va montrer que, si $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme annulateur de A, alors le polynôme $\widetilde{P} = \displaystyle\prod_{\alpha \in \mathcal{Z}(P)} (X - \alpha)$ est aussi annulateur de P, où l'on note $\mathcal{Z}(P)$ l'ensemble des zéros de P.

En effet, P supposé non nul, est scindé sur le corps $\mathbb{C}$, on a $P = \lambda \displaystyle\prod_{\alpha \in \mathcal{Z}(P)} (X - \alpha)^{m_\alpha}$*, où* $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *est le coefficient dominant de P, et m_α la multiplicité de la racine α. Soit $\alpha \in \mathcal{Z}(P)$ une racine multiple, i.e. telle que $m_\alpha \geq 2$, posons* $Q = (X - \alpha)^{m_\alpha - 2} \displaystyle\prod_{\beta \in \mathcal{Z}(P) \setminus \{\alpha\}} (X - \beta)^{m_\beta}$*, ainsi $P = \lambda(X - \alpha)^2 Q$. Le polynôme $(X - \alpha)^2 Q$ annule A, donc $(A - \alpha I_n)^2 Q(A) = 0_n$, soit* $\mathrm{Im}\big(Q(A)\big) \subset \mathrm{Ker}\left((A - \alpha I_n)^2\right)$*, soit d'après l'hypothèse faite sur la matrice A, l'inclusion*

$\operatorname{Im}\big(Q(A)\big) \subset \operatorname{Ker}(A-\alpha I_n)$, ce qui se traduit par $(A-\alpha I_n)\,Q(A) = 0_n$, donc le polynôme $(X-\alpha)Q = (X-\alpha)^{m_\alpha - 1} \displaystyle\prod_{\beta\in\mathcal{Z}(P)\setminus\{\alpha\}} (X-\beta)^{m_\beta}$ annule la matrice A. On a donc abaissé d'une unité la multiplicité de la racine α dans le polynôme annulateur P de A. Et on peut réitérer ce procédé jusqu'à obtenir un polynôme annulateur scindé à racines simples, qui sera le polynôme $\widetilde{P}$ présenté ci-dessus.

Remarque. Ce qui précède est plus facile à rédiger avec la notion de polynôme minimal, au programme MP-MPI uniquement.

Fin de la preuve. si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les matrices I_n, A, A^2, $\cdots$, A^{n^2} sont linéairement dépendantes (c'est une famille de n^2+1 éléments de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension n^2), on en déduit que A admet un polynôme annulateur P non nul (*on peut aussi utiliser le théorème de Cayley-Hamilton*). Si on fait l'hypothèse que, pour tout λ complexe, $\operatorname{Ker}(A-\lambda I_n) = \operatorname{Ker}\big((A-\lambda I_n)^2\big)$ alors le polynôme $\widetilde{P}$, qui est scindé à racines simples, annule aussi A, donc A est diagonalisable.

Trigonalisation.

38. Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

- -

---

39. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Pour quels réels a la matrice A est-elle non-diagonalisable ?

b. Pour chacun des réels a obtenus ci-dessus, trouver une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

- -

a. Le calcul du polynôme caractéristique se fait très agréablement si l'on commence par faire les opérations $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$. On obtient $\chi_A = X(X-1)(X-a)$.

- si $a \notin \{0,1\}$, alors la matrice A admet trois valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

- si $a = 0$, la valeur propre 0 est double, mais A est de rang deux (deux colonnes sont opposées), donc le sous-espace propre $E_0(A) = \operatorname{Ker}(A)$ est de dimension 1, et A n'est pas diagonalisable.

- si $a = 1$, la valeur propre 1 est double, mais $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang deux (deux lignes sont égales), donc le sous-espace propre $E_1(A) = \operatorname{Ker}(A - I_3)$ est de dimension 1, et A n'est pas diagonalisable.

En conclusion, les réels recherchés sont 0 et 1.

b. • Pour $a=0$, $A=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&0&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}$. Alors $E_0(A)=\mathrm{Vect}(\varepsilon_1)$ et $E_1(A)=\mathrm{Vect}(\varepsilon_2)$, avec $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\varepsilon_2=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, par les calculs habituels. Il suffit alors de compléter la famille libre $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ en une base de $\mathbb{R}^3$, par exemple pour cela le vecteur $\varepsilon_3=e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ fera l'affaire.

Si on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement représenté par la matrice A, on a $f(\varepsilon_1)=0$, $f(\varepsilon_2)=\varepsilon_2$ car ce sont des vecteurs propres, et $f(\varepsilon_3)$ est un quelconque vecteur qui se décompose en $a\varepsilon_1+b\varepsilon_2+c\varepsilon_3$. Dans la nouvelle base $\mathcal{B}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$, l'endomorphisme f est représenté par la matrice $T=\begin{pmatrix}0&0&a\\0&1&b\\0&0&c\end{pmatrix}$, qui est triangulaire supérieure. On a donc $A=PTP^{-1}$, avec $P=P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$. *Les amateurs de calculs, ou de calculatrices, pourront vérifier qu'avec ce choix,on trouve* $a=1$,$b=-1$, $c=0$.

• Pour $a=1$, $A=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}$. Alors $E_0(A)=\mathrm{Vect}(\varepsilon_1')$ et $E_1(A)=\mathrm{Vect}(\varepsilon_2')$, avec $\varepsilon_1'=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\varepsilon_2'=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. On complète encore une fois, par exemple avec le même vecteur $\varepsilon_3'=\varepsilon_3$, et on a une base $\mathcal{B}'=(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\varepsilon_3')$ dans laquelle f est représenté par une matrice triangulaire supérieure. La matrice de passage est cette fois $P'=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$. *On obtient ici* $a=-1$, $b=-1$, $c=1$.

40.a. Montrer que les matrices $A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&0&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$ et $T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ sont semblables.

b. On définit trois suites réelles (x_n), (y_n), (z_n) par l'initialisation $x_0=y_0=z_0=1$ et la récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad \begin{cases} x_{n+1} = 3x_n - y_n + z_n\\ y_{n+1} = 2x_n + z_n\\ z_{n+1} = x_n - y_n + 2z_n\end{cases}.$$

Exprimer x_n, y_n, z_n en fonction de n.

- -

a. On calcule $\chi_A=(X-1)(X-2)^2$. Pour calculer $\chi_A(x)$, il est agréable de commencer par l'opération $L_1\leftarrow L_1-L_2$, qui permet de factoriser tout de suite par $x-1$. On a donc 1 comme valeur propre simple, 2 comme valeur propre double. La matrice $A - I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2, donc le sous-espace propre $E_1(A)$ est de dimension 1 (de toute façon, il n'y avait pas d'autre possibilité), et c'est la droite d'équations $\{x = 0 \ ; \ y = z\}$, donc engendrée par le vecteur $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La matrice $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est aussi de rang 2, donc le sous-espace propre $E_2(A)$ est aussi de dimension 1, c'est la droite d'équations $\{x = y \ ; \ z = 0\}$, donc engendrée par le vecteur $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matrice A n'est donc pas diagonalisable (la somme des dimensions des sous-espaces propres est strictement inférieure à 3), on cherche à la trigonaliser. Elle est trigonalisable en tant que matrice réelle puisque son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$. Si on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A, on veut construire une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T$, c'est-à-dire telle que $u(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $u(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2$ et $u(\varepsilon_3) = \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$. Les vecteurs propres ε_1 et ε_2 déjà introduits ci-dessus feront l'affaire. Il ne reste plus qu'à trouver un vecteur ε_3 tel que $(u - 2\mathrm{id})(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$, ce qui nous amène à chercher une solution du système $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$, on constate que $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. On peut donc affirmer que A est semblable à T, plus précisément que $A = PTP^{-1}$ avec $P = P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b. En posant $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, on a visiblement $X_{n+1} = AX_n$ pour tout n, donc $X_n = A^n X_0$. On saura donc répondre si on sait calculer A^n. Mais de la relation $A = PTP^{-1}$ ci-dessus, on tire $A^n = PT^nP^{-1}$, calculons donc T^n. On observe que $T = D + N$ avec $D = \mathrm{diag}(1, 2, 2)$ et $N = E_{2,3}$, et ces deux matrices commutent puisque $DN = ND = 2N$. On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton, qui est particulièrement efficace puisque N est nilpotente d'indice deux: $N^2 = 0$. Par une récurrence immédiate, on a $D^k N = ND^k = 2^k N$ pour tout k, puis

$$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = D^n + n\, D^{n-1} N = D^n + n\, 2^{n-1}\, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Enfin, on calcule $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, puis (ce n'est pas très marrant):

$$A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n + n2^{n-1} & -n2^{n-1} & n2^{n-1} \\ 2^n + n2^{n-1} - 1 & 1 - n2^{n-1} & n2^{n-1} \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}.$$

Enfin, on remultiplie le tout par $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, cela donne $X_n = \begin{pmatrix} 2^n + n2^{n-1} \\ 2^n + n2^{n-1} \\ 2^n \end{pmatrix}$, d'où l'expression de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Remarque. Pour ceux qui aiment Pythonner, on peut calculer les valeurs de ces trois suites par des fonctions récursives croisées, comme ci-dessous:

```
def x(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        return 3*x(n-1)-y(n-1)+z(n-1)
def y(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        return 2*x(n-1)+z(n-1)
def z(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        return x(n-1)-y(n-1)+2*z(n-1)
```

mais ce n'est pas efficace: presque 6 millions d'appels récursifs pour calculer x_{15} par exemple! Le programme suivant, exploitant l'écriture matricielle de la récurrence, et réalisant les calculs de puissances de matrices par exponentiation rapide, est beaucoup plus efficace (8 itérations seulement pour calculer les termes d'indice 100).

```
import numpy as np
def expo(A,n):
    if n==0:
        return np.array([[1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]])
    elif n%2==0:
        return expo(np.dot(A,A),n//2)
    else:
        return np.dot(A,expo(np.dot(A,A),n//2))
def suite(n):
    X0=np.array([[1],[1],[1]])
    A=np.array([[3.,-1,1],[2,0,1],[1,-1,2]])
    B=expo(A,n)
    return np.dot(B,X0)
```

41*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $z \in \mathbb{C}$ non valeur propre de A. Prouver la relation

$$\operatorname{tr}\big((zI_n - A)^{-1}\big) = \frac{\chi_A'(z)}{\chi_A(z)} .$$

- -

La matrice A est trigonalisable, donc $A = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \times \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$, où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de A. On a alors $\chi_A(z) = \prod_{k=1}^{n}(z-\lambda_k)$ et $\chi'_A(z) = \sum_{k=1}^{n}\Big(\prod_{j\neq k}(z-\lambda_j)\Big)$, ce qui peut s'écrire, lorsque $z \notin \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} = \mathrm{Sp}(A)$, $\chi'_A(z) = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{\chi_A(z)}{z-\lambda_k}$. Si z n'est pas valeur propre de A, alors $zI_n - A = P(zI_n - T)P^{-1}$, avec $zI_n - T = \begin{pmatrix} z-\lambda_1 & & \times \\ & \ddots & \\ (0) & & z-\lambda_n \end{pmatrix}$, puis $(zI_n - T)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{z-\lambda_1} & & \times \\ & \ddots & \\ (0) & & \dfrac{1}{z-\lambda_n} \end{pmatrix}$, et enfin $zI_n - A$ est inversible car $zI_n - T$ l'est, puis $(zI_n - A)^{-1} = P(zI_n - T)^{-1}P^{-1}$, et finalement

$$\mathrm{tr}\big((zI_n - A)^{-1}\big) = \mathrm{tr}\big((zI_n - T)^{-1}\big) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z-\lambda_k} = \frac{\chi'_A(z)}{\chi_A(z)}\ .$$

Pour être tout à fait complet, le lecteur prouvera que, si une matrice T est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux non nuls a_1, $\cdots$, a_n, alors son inverse T^{-1} est aussi triangulaire supérieure, avec pour coefficients diagonaux $\dfrac{1}{a_1}$, $\cdots$, $\dfrac{1}{a_n}$.

42*. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$.

a. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

b. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.

- -

a. Notons f et g les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associés à A et B, on a donc $f \circ g = g \circ f$. Comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'endomorphisme f admet au moins une valeur propre α, et comme f et g commutent, le sous-espace propre $E_\alpha(f)$ est stable par g, notons $\widetilde{g}$ l'endomorphisme de $E_\alpha(f)$ induit par g. Comme $\widetilde{g}$ est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, il admet au moins une valeur propre β et un vecteur propre x associé, lequel est alors vecteur propre à la fois de f (pour la valeur α) et de g (pour la valeur propre β).

b. On procède par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, c'est immédiat.

Soit $n \geq 2$, supposons la propriété vraie pour des matrices carrées d'ordre $n-1$. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. Notons toujours f et g les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associés à A et B. D'après **a.**, les endomorphismes f et g admettent un vecteur propre commun ε_1. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{C}^n$ dont le premier vecteur est ε_1. On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & L \\ 0 & A' \end{pmatrix}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \beta & L' \\ 0 & B' \end{pmatrix}$, avec L et L' matrices-lignes dans $\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$, A' et B' matrices carrées d'ordre $n-1$.

43*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence

$$A \text{ est nilpotente} \iff \forall k \in [\![1, n]\!] \quad \mathrm{tr}(A^k) = 0\ .$$

- -

Le sens direct est facile: si A est nilpotente, alors pour k entier naturel non nul, A^k l'est aussi donc $\mathrm{Sp}(A^k) = \{0\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: en effet, comme A admet un polynôme annulateur de la forme X^p, sa seule valeur propre possible est 0, et 0 est effectivement valeur propre puisque A est non-inversible. On a donc $\mathrm{tr}(A^k) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A^k)} m_\lambda\, \lambda = 0$.

Réciproquement, supposons $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Supposons par l'absurde que A admette des valeurs propres non nulles, et notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ ses valeurs propres **non nulles** distinctes, notons $m_1, \cdots, m_p$ leurs multiplicités respectives. On a alors $p \leq n$ et les m_i sont non nuls ($1 \leq i \leq p$). En trigonalisant, on voit que pour tout k, la matrice A^k admet pour valeurs propres non nulles $\lambda_1^k, \cdots, \lambda_p^k$ avec les mêmes multiplicités $m_1, \cdots, m_p$ (*en toute rigueur, ce n'est pas tout à fait vrai car si les λ_i sont distincts, les λ_i^k peuvent ne plus l'être, mais cela ne change rien pour l'expression de la trace...*). On a donc $\mathrm{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k m_i = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Conservons seulement les p premières équations, i.e. pour $k \in [\![1, p]\!]$, elles constituent un système linéaire homogène **(S)** de p équations à p inconnues $m_1, \cdots, m_p$ dont le déterminant est

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_p^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^p & \lambda_2^p & \cdots & \lambda_p^p \end{vmatrix} = \left(\prod_{i=1}^{p} \lambda_i \right) V_p(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$$

(déterminant de Vandermonde). Les λ_i étant deux à deux distincts et non nuls, ce déterminant est non nul, la seule solution du système **(S)** est alors $m_1 = \cdots = m_p = 0$, ce qui est absurde. On conclut de tout cela que la seule valeur propre de A est 0, donc comme A est trigonalisable, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure T dont les coefficients diagonaux sont nuls et, comme $T^n = 0$, on a aussi $A^n = 0$ et A est nilpotente. *On peut aussi conclure en remarquant que, si* $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$*, on a nécessairement* $\chi_A = X^n$ *et utiliser Cayley-Hamilton pour en déduire que* A *est nilpotente.*

Théorème de Cayley-Hamilton.

44*. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'il existe une droite ou un plan de E stable par f. Est-ce encore vrai en dimension infinie ?

- -

45. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Montrer que l'endomorphisme T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad T(M) = AM - MA$ est nilpotent.

- -

Montrons que la seule valeur propre de l'endomorphisme T est 0. Soit donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$, il existe alors $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle, telle que $T(M) = \lambda M$, soit $MA = (A - \lambda I_n)M$. Par une récurrence immédiate, on a $MA^k = (A - \lambda I_n)^k M$ pour tout k entier naturel. Si $p \in \mathbb{N}^*$ est tel que $A^p = 0_n$, on a alors $(A - \lambda I_n)^p M = 0_n$, ce qui entraîne que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible (puisque M n'est pas la matrice nulle). Donc λ est valeur propre de A, et comme A est nilpotente, nécessairement $\lambda = 0$. On a ainsi prouvé que $\mathrm{Sp}(T) \subset \{0\}$, donc que $\mathrm{Sp}(T) = \{0\}$ puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Donc $\chi_T = (-1)^{n^2} X^{n^2}$, et par Cayley-Hamilton, $T^{n^2} = \chi_T(T) = 0$, l'endomorphisme T est nilpotent.

---

46. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

a. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

b. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

c. Soit $B = A + \lambda I_3$ avec λ réel non nul. Montrer que B est inversible et que l'on peut écrire $B^{-1} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$, où α, β, γ sont des réels (dépendant de λ).

- -

a. Par la règle de Sarrus, on calcule $\chi_A = X\left(X^2 + (a^2 + b^2 + c^2)\right)$.

Si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, alors A est la matrice nulle et est évidemment diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Sinon, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{0\}$ et, comme A n'est pas la matrice nulle, elle n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b. Si $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, alors A est la matrice nulle et est évidemment diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Sinon, en posant $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0, ir, -ir\}$ (trois valeurs propres distinctes), donc A est toujours diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

c. De ce qui précède, on déduit qu'un réel non nul n'est jamais valeur propre de A, donc $-\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$ et $B = A + \lambda I_n$ est inversible. De Cayley-Hamilton, on déduit alors que $\chi_A(A) = 0_3$, soit $A^3 + r^2 A = 0_3$, soit $(B - \lambda I_3)^3 + r^2(B - \lambda I_3) = 0_3$, d'où l'on tire que

$$B\left(\frac{1}{\lambda(r^2 + \lambda^2)}\left(B^2 - 3\lambda B + (3\lambda + r^2)I_3\right)\right) = I_3 \,,$$

donc

$$B^{-1} = \frac{1}{\lambda(r^2 + \lambda^2)}\left(B^2 - 3\lambda B + (3\lambda + r^2)I_3\right) = \frac{1}{\lambda(r^2 + \lambda^2)}\left((A + \lambda I_3)^2 - 3\lambda(A + \lambda I_3) + (3\lambda + r^2)I_3\right) ,$$

que l'on peut développer et réordonner sous la forme $\alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$, avec α, β, γ réels.

Exercices avec Python.

47. Soit la matrice $A_{n,a} = \begin{pmatrix} 0 & 1/a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & 1/a & \ddots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1/a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Écrire une fonction `matrice(n,a)` qui renvoie la matrice $A_{n,a}$.

b. Donner des valeurs approchées des valeurs propres de $A_{n,a}$ pour $n \in [\![3, 8]\!]$ et $a \in \{-2, -1, 1, 2, 3\}$.

c. Soit $(P_n)_{n \geq 1}$ la suite de polynômes donnée par

$$P_1 = X \qquad P_2 = X^2 - 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_{n+2} = X\,P_{n+1} - P_n\ .$$

(i). Calculer les coefficients de $P_3, \cdots, P_8$.

(ii). Donner des valeurs approchées des racines de $P_3, \cdots, P_8$.

(iii). Conjecturer un lien entre P_n et $A_{n,a}$ puis le démontrer.

d. Les matrices $A_{n,a}$ sont-elles inversibles ? Sont-elles diagonalisables ?

e. Trouver un segment de $\mathbb{R}$ contenant toutes les valeurs propres des matrices $A_{n,a}$.