DM de MATHÉMATIQUES numéro 3 COMMENTAIRES
PSI2 2024-2025

Ce sujet, composé à partir de plusieurs problèmes de concours récents, propose une étude des matrices stochastiques, très utilisées en probabilités (pour les chaînes de Markov par exemple). La partie D, assez technique, ainsi que certaines questions plus faciles du début du sujet, sont extraites d'un problème de Centrale (2021, filière PSI).

A.1.a. Question complètement élémentaire... mais bien souvent mal rédigée! L'énoncé demande en effet de prouver une équivalence, et de nombreuses copies ne mentionnent que l'implication dans un sens!

A.1.b. Il est plus élégant d'utiliser la question précédente que de refaire des calculs de sommes des coefficients d'une ligne!

A.2.c. Question délicate, surtout quand le chapitre sur les espaces vectoriels normés n'a pas encore été traité. En effet, pour le moment, vous n'avez pas encore le moyen de justifier des égalités du genre $\lim\limits_{k\to+\infty} A^{n+k} = \lim\limits_{k\to+\infty}(A^nA^k) = A^n\left(\lim\limits_{k\to+\infty} A^k\right)$. La deuxième égalité résulte en effet de la "continuité du produit matriciel", propriété qu'il est un peu prématuré de mentionner. Alors comment faire ? Bah on fait des calculs sur les coefficients, *cf.* corrigé, ce n'est pas très élégant, mais on fera mieux quand on aura plus de moyens à notre disposition!

ATTENTION! J'ai vu sur des copies une démonstration fausse de l'égalité $A^nB = B$. En effet, la démonstration proposée "par récurrence forte" n'est pas valable car elle ne prouve pas le cas $n = 1$, il aurait donc fallu montrer à part que $AB = B$.

A.3., A.4. et B.1. Petites questions techniques, en général bien traitées.

B.2. Le lien avec la question précédente (qui donne le rang de la matrice $M = A - I_p$) a peu été vu, il y a donc beaucoup trop d'affirmations $E_1(A) = \mathrm{Vect}(U)$ sans aucune justifiaction!

B.3. Question un peu plus délicate, utilisant le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire. Assez peu de bonnes réponses.

D.3. Question assez technique. Il y a tout de même un assez grand nombre de bonnes réponses. Quelques erreurs d'indexation rendent les calculs incompréhensibles dans certaines copies.

D.5. Pour déduire que la suite de matrices (A^n) converge, il convient de rappeler l'encadrement $\alpha_j^{(n)} \leq a_{i,j}^{(n)} \leq \beta_j^{(n)}$, ce qui est parfois omis.