SÉRIES ENTIÈRES

I. Définition et exemples.

Définition. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. La **série entière** associée est la série de fonctions (de variable complexe) $\sum_{n\geq 0} u_n$, avec pour tout $z\in\mathbb{C}$, $u_n(z)=a_n z^n$.

Il arrivera souvent (mais pas toujours!) que l'on ne s'intéresse qu'à une variable réelle, qui sera alors souvent notée x.

Une série entière est donc une série de fonctions "monomiales" (i.e. polynomiales avec un seul terme). La série entière associée à la suite de **coefficients** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fréquemment notée $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ ou $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

• **Exemple 1.** Si $a_n=1$ pour tout n entier naturel, on a la **série géométrique** $\sum_{n\geq 0} z^n$.

On sait qu'elle converge si et seulement si $|z|<1$, et qu'alors sa somme vaut $\dfrac{1}{1-z}$.

• **Exemple 2.** Si $a_n=\dfrac{1}{n!}$ pour tout n entier naturel, on a la **série exponentielle** $\sum_{n\geq 0}\dfrac{z^n}{n!}$.

Cette dernière converge pour tout z complexe, et sa somme vaut $e^z=\exp(z)$.

• **Exemple 3.** Si $a_n=n!$ pour tout n entier naturel, on a une série entière $\sum_{n\geq 0} n!\, z^n$ qui ne converge que pour $z=0$ (la règle de d'Alembert ou bien un résultat de croissance comparée montrent que la série diverge grossièrement si z est non nul), cette série entière présente évidemment très peu d'intérêt!

• **Exemple 4.** Si $a_0=0$ et $a_n=\dfrac{1}{n}$ pour tout n entier naturel non nul, on obtient la série entière $\sum_{n\geq 1}\dfrac{z^n}{n}$. Elle converge absolument si $|z|<1$, diverge grossièrement si $|z|>1$, sa nature est plus compliquée à étudier lorsque $|z|=1$ (elle est par exemple divergente pour $z=1$, semi-convergente pour $z=-1$). Si on se limite à la variable réelle, l'ensemble des **réels** pour lesquelles elle converge est l'intervalle semi-ouvert $[-1,1[$.

• **Exemple 5.** Si $a_n=\begin{cases}1 & \text{si } n \text{ est un carré}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$, on obtient une série entière d'écriture $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = 1+z+z^4+z^9+z^{16}+\cdots$, que l'on peut réindexer sous la forme $\sum_{k\geq 0} z^{k^2}$. On montre facilement qu'elle converge absolument si $|z|<1$, et qu'elle diverge grossièrement si $|z|\geq 1$.

II. Rayon de convergence.

1. Lemme d'Abel.

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, soit z_0 un complexe non nul.

Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Preuve: Il existe donc un réel positif M tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|a_n z_0^n\right| \leq M$. Si $|z| < |z_0|$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|a_n z^n\right| = \left|a_n z_0^n\right| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n .$$

Comme $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, la série géométrique $\sum \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, on déduit la convergence de la série $\sum \left|a_n z^n\right|$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Une conséquence immédiate de ce lemme d'Abel est que, si une série entière $\sum a_n z^n$ converge pour un certain nombre complexe z_0, alors elle converge absolument pour tout complexe z tel que $|z| < |z_0|$.

2. Définition du rayon de convergence.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, on introduit l'ensemble I des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée:

$$I = \left\{ r \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n|\, r^n \leq M \right\} .$$

Cet ensemble I est un intervalle contenant 0. En effet, il est clair que $0 \in I$ et que, si $r \in I$, alors $[0, r] \subset I$ puisque, si la suite $(a_n r^n)$ est bornée et si $0 \leq r' \leq r$, alors a fortiori la suite $(a_n r'^n)$ est bornée. L'ensemble I est donc, soit $\{0\}$, soit $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, soit un intervalle de la forme $[0, R[$ ou $[0, R]$ avec $R \in \mathbb{R}_+^*$.

Définition. On appelle **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ la borne supérieure, dans $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$, de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

Avec les notations précédentes, le rayon de convergence R est $R = \sup(I)$, avec la convention $R = +\infty$ dans le cas où $I = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

Exemples.

- pour la série exponentielle (exemple 2 du paragraphe I), on a $I = \mathbb{R}_+$ donc $R = +\infty$.
- pour la série géométrique (exemple 1 du paragraphe I), on a $I = [0, 1]$ donc $R = 1$.
- pour la série entière $\sum n z^n$, on a $I = [0, 1[$ donc aussi $R = 1$.
- pour la série $\sum n! z^n$ (exemple 3 du paragraphe I), on a $I = \{0\}$ donc $R = 0$.

3. Étude de la convergence d'une série entière.

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$. Alors

(1): la série entière converge absolument en tout point z tel que $|z| < R$;

(2): la série entière diverge grossièrement en tout point z tel que $|z| > R$;

(3): si r est un réel tel que $0 < r < R$, la série entière converge normalement sur le disque fermé $\overline{D}(O, r)$ de centre O et de rayon r.

Preuve:

- Si $|z| < R$, soit r un réel tel que $|z| < r < R$. On a alors $r \in I$ puisque $I = [0, R]$ ou $[0, R[$, donc la suite $(a_n r^n)$ est bornée. Du lemme d'Abel, on déduit alors la convergence absolue de la série $\sum a_n z^n$. Ceci prouve l'assertion **(1)**.

- Si $|z| > R = \sup(I)$, alors le réel positif $|z|$ n'appartient pas à I, ce qui signifie que la suite $(a_n |z|^n)$ n'est pas bornée, donc cette suite ne tend pas vers zéro, d'où la divergence grossière de la série entière, on a donc prouvé **(2)**.

- Si $0 < r < R$, le point **(1)** *montre la convergence absolue de la série $\sum a_n r^n$. Si on pose $u_n(z) = a_n z^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \overline{D}(O, r)$, alors $\|u_n\|_{\infty, \overline{D}(O,r)} = |a_n| r^n$ est le terme général d'une série convergente, ce qui est bien la définition de la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$ sur l'ensemble $\overline{D}(O, r)$.*

Remarque. La proposition ci-dessus ne donne aucune information sur le comportement de la série entière en les points z tels que $|z| = R$, et c'est normal car il n'y a rien à dire de général sur la nature de la série sur le "cercle d'incertitude" $C(O, R)$. L'étude des propriétés de la série en les points de ce cercle n'est pas un objectif de votre programme.

Définitions. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R avec $R \in]0, +\infty[$.
On appelle **disque de convergence** de cette série entière le disque **ouvert** de centre O et de rayon R dans le plan complexe: $D = D(O, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.
On appelle **intervalle de convergence** de cette série entière l'intervalle **ouvert** $] - R, R[$ dans $\mathbb{R}$.

Dans le cas où le rayon de convergence vaut $+\infty$, on convient que le **disque de convergence** est le plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier, et que l'**intervalle de convergence** est la droite réelle $\mathbb{R}$ tout entière.

Dans le cas où le rayon de convergence est nul, ces notions n'ont aucun intérêt!

Remarque importante. On notera que le disque de convergence n'est pas toujours exactement l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels la série entière converge. De même, l'intervalle de convergence n'est pas toujours exactement l'ensemble des réels x pour lesquels la série converge. Par exemple, la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1, son intervalle de convergence est donc par définition l'intervalle ouvert $] - 1, 1[$. Cependant, l'ensemble des réels x pour lesquels la série converge est l'intervalle semi-ouvert $[-1, 1[$.

Précisons: soit une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$, alors l'ensemble de définition D_f de la fonction **de variable réelle** $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est l'un des quatre intervalles $]-R, R[$, $]-R, R]$, $[-R, R[$ ou $[-R, R]$. En revanche, si $R = +\infty$, alors $D_f = \mathbb{R}$.

4. Détermination du rayon de convergence.

a. Règles de comparaison.

L'idée essentielle est de comprendre que, plus les coefficients sont petits (en module), plus le rayon de convergence de la série entière est grand. Plus précisément,

Proposition. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, notons R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs. Alors:

(1): si $|a_n| \leq |b_n|$ pour n assez grand, alors $R_a \geq R_b$;

(2): si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$;

(2bis): si $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$;

(3): si $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Preuve: Introduisons les intervalles

$$I_a = \left\{ r \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée} \right\} \quad \text{et} \quad I_b = \left\{ r \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \text{la suite } (b_n r^n) \text{ est bornée} \right\} .$$

On sait que $R_a = \sup(I_a)$ *et* $R_b = \sup(I_b)$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}$.

- Supposons $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang, il est clair alors que $I_b \subset I_a$, d'où $R_b \leq R_a$.

- Si $a_n = O(b_n)$, alors il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|a_n| \leq M\,|b_n|$ à partir d'un certain rang, on a alors la même conclusion. Même chose si $a_n = o(b_n)$.

- Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors on a à la fois $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$, donc $R_a \geq R_b$ et $R_b \geq R_a$, et finalement $R_a = R_b$.

b. Utilisation de la règle de d'Alembert.

Cette règle, énoncée dans le cadre des séries numériques à termes strictement positifs, peut être utilisée pour déterminer le rayon de convergence de nombreuses séries entières. Étudions d'abord une première situation:

Proposition. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, on suppose que les coefficients a_n sont tous non nuls. Si le rapport $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ admet une limite l dans $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$, alors la série entière a pour rayon de convergence $R = \dfrac{1}{l}$, en faisant ici les conventions que $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.

Preuve: Pour z complexe non nul et n entier naturel, posons $u_n(z) = a_n z^n$. Alors, en supposant d'abord $l < +\infty$,

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad l\,|z| ,$$

on en déduit que:

- si $|z| < \dfrac{1}{l}$, alors $l|z| < 1$, donc la série entière converge absolument ;

- si $|z| > \dfrac{1}{l}$, alors $l|z| > 1$, donc la série entière diverge grossièrement.

Le rayon de convergence est donc $R = \dfrac{1}{l}$.

Enfin, si $l = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = +\infty$ pour tout z non nul, donc la série entière considérée ne converge que pour $z = 0$, elle a donc un rayon de convergence nul.

Mais attention! Il y a de nombreuses situations où cette règle ne peut s'appliquer directement, c'est notamment le cas lorsque des coefficients de la série entière sont nuls, et ceci n'apparaît pas forcément au premier coup d'œil, suivant la façon d'écrire une telle série. Prenons par exemple la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} n\, 3^n z^{2n+1}$. Comme $\dfrac{(n+1)\,3^{n+1}}{n\,3^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$, une application peu précautionneuse de la règle précédente pourrait amener à croire que le rayon de convergence vaut $\dfrac{1}{3}$... mais il n'en est rien! En effet, si l'on voulait mettre la série entière ci-dessus sous la forme $\sum a_n z^n$, on aurait alors $a_{2k} = 0$ pour tout k entier, et $a_{2k+1} = k\,3^k$, il y a donc un coefficient sur deux qui est nul! On applique alors la règle de d'Alembert de la façon suivante: on pose $u_n(z) = n\,3^n z^{2n+1}$, ainsi pour tout z non nul,

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \frac{(n+1)\,3^{n+1}\,|z|^{2n+3}}{n\,3^n\,|z|^{2n+1}} = 3\left(1+\frac{1}{n}\right)|z|^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3\,|z|^2\ ,$$

on en déduit, par la règle de d'Alembert sur les séries numériques, que:

- si $|z| < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, alors $3|z|^2 < 1$, donc la série converge absolument ;

- si $|z| > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, alors $3|z|^2 > 1$, donc la série diverge grossièrement ,

et on conclut finalement que $R = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Exemple à connaître. Pour tout réel α, la série entière $\sum n^\alpha z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

Preuve. C'est immédiat puisque $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

Exercice II.4.1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

$$\textbf{a}.\ \sum_{n\geq 0}\frac{n!}{n^n}z^n\ ;\quad \textbf{b}.\ \sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}z^{3n+1}\ ;\quad \textbf{c}.\ \sum_{n\geq 0}3^n\,z^{n^2}\ .\ \square$$

5. Opérations sur les séries entières.

a. Somme.

Proposition. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, notons R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs. Pour tout n entier naturel, posons $c_n = a_n + b_n$, et notons R_c le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$. On a alors:

(1): $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$;

(2): si $R_a \neq R_b$, alors $R_c = \min\{R_a, R_b\}$;

(3): si z est un complexe tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, alors on a

$$(*) \ : \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \ .$$

La relation **(*)** peut être qualifiée de **linéarité de la somme**.

Preuve:

• *Si $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, alors les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont toutes deux convergentes, il résulte du cours sur les séries numériques que la série $\sum c_n z^n$ converge aussi, et on a immédiatement* **(1)** *et* **(3)**.

• *Si $R_a < R_b$ par exemple, soit z tel que $R_a < |z| < R_b$. Comme la série $\sum a_n z^n$ diverge et que $\sum b_n z^n$ converge, il résulte du cours sur les séries numériques que la série $\sum c_n z^n$ diverge, ce qui prouve que $R_c \leq |z|$. On a donc $R_c \leq R_a + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $R_c \leq R_a$. En combinant avec* **(1)**, *on conclut que $R_c = R_a = \min\{R_a, R_b\}$, soit l'assertion* **(2)**.

Remarque. Dans le cas où $R_a = R_b$, on peut avoir $R_c > R_a$. Par exemple, avec $a_n = 1$ et $b_n = -1$ pour tout n, on a $R_a = R_b = 1$, mais comme $c_n = a_n + b_n = 0$, il est clair que $R_c = +\infty$.

b. Produit de Cauchy.

Proposition. Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, notons R_a et R_b leurs rayons de convergence respectifs. Pour tout n entier naturel, posons $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p b_q$, et notons R_c le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$. On a alors:

(1): $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$;

(2): si z est un complexe tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, alors les trois séries $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ sont absolument convergentes, et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q z^q \right) .$$

Preuve: Tout cela résulte immédiatement du cours sur les séries numériques.

Un exemple de calcul. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Considérons la série entière $\sum_{n\geq 1} H_n x^n$. En posant $a_0 = 0$ et $a_p = \frac{1}{p}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$, puis $b_q = 1$ pour tout q entier naturel, on observe que $H_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ pour tout n entier naturel (en convenant que $H_0 = 0$), ainsi la série entière $\sum_{n\geq 1} H_n x^n$ est le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{p\geq 1} \frac{x^p}{p}$ et $\sum_{q\geq 0} x^q$. Ces deux dernières séries entières ayant pour rayon de convergence 1, on déduit que le rayon de convergence de $\sum H_n x^n$ vaut au moins 1 (*mais la règle de d'Alembert montre aussi qu'il vaut exactement 1*). En admettant provisoirement que $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$ pour tout $x \in]-1,1[$, on déduit que

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x} \ .$$

c. Dérivation formelle.

L'énoncé figurant au programme est le suivant:

Proposition.

Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Preuve: Posons $b_n = n a_n$ pour tout n, et nommons respectivement R_a et R_b les rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Il faut prouver que $R_a = R_b$.

On a déjà $|a_n| \leq |b_n|$ pour tout $n \geq 1$ d'où $R_a \geq R_b$ par comparaison.

Par l'absurde, supposons $R_b < R_a$. Soient alors u et v deux réels tels que $R_b < u < v < R_a$. Comme $0 \leq v < R_a$, la série à termes positifs $\sum |a_n| v^n$ converge. Mais on a alors

$$\big|b_n u^n\big| = \big|n\, a_n\, u^n\big| = |a_n| v^n \cdot n \left(\frac{u}{v}\right)^n = o\big(|a_n| v^n\big)$$

puisque $\lim_{n\to+\infty} n \left(\frac{u}{v}\right)^n = 0$ par croissances comparées. Par comparaison de séries à termes positifs, on déduirait alors la convergence absolue de la série $\sum b_n u^n$, ce qui est absurde puisque $u > R_b$.

On conclut donc que $R_b = R_a$.

Lien avec la dérivation. Il s'agit ici uniquement de dérivation formelle. De la même façon que l'on définit la dérivée formelle d'un polynôme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ par la relation

$P' = \sum_{k=1}^{d} k a_k X^{k-1}$, si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une série entière, on peut définir sa **dérivée formelle** comme étant la série entière $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$, ou encore $\sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} z^n$ par décalage d'indice.
La proposition énoncée ci-dessus peut se relire ainsi:

Une série entière et sa dérivée formelle ont le même rayon de convergence.

En opérant dans l'autre sens, on note aussi qu'une série entière $\sum a_n z^n$ et sa "primitive formelle" $\sum a_n \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$ ont le même rayon de convergence. Le lien avec la dérivation et la primitivation des fonctions (de variable réelle) sera fait dans le paragraphe suivant.

III. Régularité de la fonction somme.

1. Continuité.

Il résulte de l'assertion **(3)** de la proposition énoncée dans le paragraphe **II.3.** que:

Proposition. Une série entière (d'une variable réelle) converge normalement sur tout segment inclus dans son intervalle ouvert de convergence.

Preuve. En effet, si la série entière $\sum a_n x^n$ *a pour rayon de convergence* $R \in]0, +\infty]$, *on a vu qu'il y a convergence normale de cette série entière, c'est-à-dire de la série de fonctions* $\sum u_n$ *avec* $u_n(x) = a_n x^n$, *sur tout segment de la forme* $[-r, r]$ *avec* $0 < r < R$. *Si* $S = [a, b]$ *est un segment inclus dans l'intervalle de convergence* $]-R, R[$, *on a alors* $-R < a < b < R$ *et, en posant* $r = \max\{|a|, |b|\}$, *on a* $S \subset [-r, r]$, *d'où a fortiori la convergence normale sur le segment* S.

Attention! Il n'y a pas, en général, convergence normale sur l'intervalle de convergence $]-R, R[$. Par exemple, si on considère la série géométrique $\sum x^n$, de rayon de convergence 1, on pose donc $u_n(x) = x^n$ pour tout n. Si r est un réel tel que $0 < r < 1$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur le segment $S = [-r, r]$ puisque $\|u_n\|_{\infty,S} = r^n$ est le terme général d'une série convergente. En revanche, si $I =]-1, 1[$ est l'intervalle ouvert de convergence, on a $\|u_n\|_{\infty,I} = 1$ pour tout n, et la série de terme général 1 est grossièrement divergente.

De la proposition ci-dessus résulte immédiatement le

Théorème. La fonction somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $I =]-R, R[$.

Preuve. En effet, la continuité sur I *de chacune des fonctions* $u_n : x \mapsto a_n x^n$ *et la convergence normale sur tout segment de* I *de la série de fonctions* $\sum u_n$ *entraînent la continuité sur* I *de la fonction somme* $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Sans démonstration, nous admettrons que, si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors la fonction $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, de variable complexe, est continue sur le disque ouvert de convergence $D(O, R)$. *Cette notion de continuité d'une fonction de variable complexe pourra être véritablement comprise après avoir traité le chapitre sur la continuité des applications entre des espaces vectoriels normés.*

2. Primitivation.

On a le résultat suivant:

Théorème. Les primitives de la fonction somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence s'obtiennent par primitivation terme à terme.

Explication. Il faut comprendre par là que, si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$ avec $R > 0$, alors la primitive F de f qui s'annule en 0 a pour expression

$$\forall x \in\,]-R, R[\qquad F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\,.$$

Preuve. En effet, la série de fonctions $\sum u_n$, avec $u_n(t) = a_n t^n$, converge normalement sur tout segment inclus dans $]-R, R[$, donc en particulier sur le segment $[0, x]$ ou $[x, 0]$, ce qui autorise à intervertir série et intégrale (ou "intégrer terme à terme") sur ce segment.

Remarque. Plus généralement, si $S = [\alpha, \beta]$ est un segment inclus dans l'intervalle de convergence $]-R, R[$, l'intégrale de la fonction somme f sur ce segment peut se calculer par intégration terme à terme, i.e.

$$\int_S f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_S u_n\,, \quad \text{ou} \quad \int_\alpha^\beta \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\alpha^\beta a_n t^n\,\mathrm{d}t\,.$$

Ce théorème va ici être utilisé pour obtenir, à partir du développement en série géométrique, d'autres développements en série entière usuels.

Exemple 1. On sait que $\forall x \in]-1, 1[\quad \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$, cette dernière série étant une série entière de rayon de convergence 1. Si $x \in]-1, 1[$, une intégration terme à terme sur le segment $[0, x]$ ou $[x, 0]$, justifiée par le théorème ci-dessus, donne

$$\forall x \in\,]-1, 1[\qquad \ln(1+x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ou, par un décalage d'indice,

$$\forall x \in\,]-1, 1[\qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\, \frac{x^n}{n}\,.$$

Exemple 2. On sait que $\forall x \in]-1,1[\quad \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$, cette dernière série étant aussi une série entière de rayon de convergence 1. Si $x \in]-1,1[$, une intégration terme à terme sur le segment $[0,x]$ ou $[x,0]$ donne

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \mathrm{Arctan}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} .$$

3. Dérivation.

Théorème. La fonction somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence, et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme.

Preuve. En effet, posons $u_n(x) = a_n x^n$, soit R le rayon de convergence ($R > 0$). On sait que la série entière "dérivée formelle", c'est-à-dire la série de fonctions $\sum u_n'$, a le même rayon de convergence R. Et on peut bien sûr itérer ce raisonnement: pour tout k entier naturel, la série de fonctions $\sum_n u_n^{(k)}$ est encore une série entière de rayon de convergence R.

On peut donc appliquer le théorème de dérivation des séries de fonctions et son extension à la classe $\mathcal{C}^k$: en effet, les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout k entier naturel, la série de fonctions $\sum_n u_n^{(k)}$ converge normalement sur tout segment inclus dans l'intervalle $I =]-R,R[$. On en déduit que la fonction somme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, et que pour tout k entier naturel, on a $f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$ sur I.

Concrètement, si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $I =]-R,R[$, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$, puis $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ et, plus généralement,

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \qquad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, a_n x^{n-k} .$$

Une translation d'indice donne (poser $p = n-k$):

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \qquad f^{(k)}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(p+k)!}{p!}\, a_{p+k} x^p .$$

En évaluant pour $x = 0$, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad f^{(k)}(0) = k!\, a_k , \quad \text{soit} \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} .$$

On dispose donc d'une expression des coefficients d'une série entière (de rayon de convergence non nul) au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.

Proposition. **Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et si f est la fonction somme, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et on a**

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.}$$

Un exemple de calcul. Partons de la série géométrique: $\forall x \in]-1,1[\quad \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.
Par dérivation terme à terme (autorisée par le théorème énoncé dans ce paragraphe), on obtient

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^{n-1}\ .$$

Plus généralement, pour tout k entier naturel, un calcul de dérivée k-ème (par dérivations successives terme à terme) donne la relation

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \frac{1}{k!}\,\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \sum_{p=0}^{+\infty} \binom{p+k}{k}\ x^p\ .$$

Une application aux fonctions prolongées. Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$.
Son ensemble de définition est $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\, \cup\,]0, +\infty[$ et elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur chacun de ces deux intervalles par théorèmes d'opérations. De plus, elle est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. La fonction ainsi prolongée (je la nommerai toujours f) est alors continue sur $\mathbb{R}$... mais est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$? La réponse est oui, mais sans le cours sur les séries entières, la démonstration est longue et difficile. Or, on sait que, pour tout x réel, $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. On en déduit facilement que, pour tout x réel, on a $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$, y compris pour $x = 0$. La fonction f est donc somme, sur $\mathbb{R}$ tout entier, d'une série entière (alors bien sûr de rayon de convergence infini). Le théorème énoncé au début de ce paragraphe montre alors que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

IV. Développements en série entière.

1. Fonctions développables en série entière.

Définition. Soit $r \in]0, +\infty]$, soit $f :]-r, r[\to \mathbb{K}$. On dit que f est **développable en série entière** (en abrégé **DSE**) sur $]-r, r[$ s'il existe une suite (a_n) de scalaires telle que

$$\forall x \in]-r, r[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\ .$$

Cela signifie donc que f est, sur $]-r, r[$, la somme d'une série entière, dont le rayon de convergence R est tel que $R \geq r$.

Exemples. La fonction exponentielle est DSE sur $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est DSE sur $]-1,1[$, elle est donc a fortiori DSE sur tout intervalle $]-r,r[$ avec $0<r<1$.

<u>Proposition.</u> Si f et g sont deux fonctions DSE sur $]-r,r[$ avec $r>0$, si α est un scalaire, alors les fonctions $\alpha f+g$ et fg sont DSE sur $]-r,r[$.

Preuve. Si $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *et* $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ *sur* $]-r,r[$*, alors clairement*

$$(\alpha f+g)(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha a_n+b_n)x^n \quad \text{sur} \quad]-r,r[\;.$$

Pour la fonction fg*, on a* $f(x)g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ *sur* $]-r,r[$ *avec* $c_n=\displaystyle\sum_{k+l=n} a_k b_l$*, voir paragraphe sur le produit de Cauchy.*

<u>Proposition (unicité du développement).</u> Si f est DSE sur $]-r,r[$ avec $r>0$, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$, et les coefficients du développement de f en série entière sont déterminés de façon unique.

Preuve. Le caractère $\mathcal{C}^\infty$ *de* f *résulte du paragraphe précédent, et l'unicité des coefficients aussi puisque, si* $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *sur* $]-r,r[$*, alors pour tout* n *entier naturel, on a* $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

<u>Définition.</u> Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, soit $f: I\to\mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On appelle **série de Taylor** de f (en 0) la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Ce qui précède montre que, si une fonction f est DSE sur un intervalle $]-r,r[$ avec $r>0$, alors l'unique série entière dont elle est la somme sur $]-r,r[$ est sa série de Taylor.

Une fonction $f:]-r,r[\to\mathbb{K}$ est donc DSE sur $]-r,r[$ si et seulement si:

- elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,r[$;
- elle est somme de série de Taylor sur cet intervalle.

Les trois exemples ci-dessous montrent des situations qui font qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ n'est pas toujours développable en série entière.

<u>Exemple 1.</u> La fonction arctangente est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on a vu en **III.2.** qu'elle est somme sur $]-1,1[$ de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, cette dernière série est donc sa série de Taylor. Comme son rayon de convergence vaut 1, la fonction arctangente est DSE sur $]-1,1[$, mais elle n'est DSE sur aucun intervalle ouvert "plus grand", c'est-à-dire sur aucun intervalle $]-r,r[$ avec $r>1$.

<u>Exemple 2.</u> Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$. On montre (*c'est un exercice un peu long*) que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout n entier naturel, on a $f^{(n)}(0) = 0$. Sa série de Taylor est donc la série nulle! (elle a donc un rayon de convergence infini, et sa somme est nulle partout). Or, la fonction f ne s'annule qu'en 0. Il n'existe donc aucun $r > 0$ pour lequel f est DSE sur $]-r, r[$.

Exemple 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2^n x)}{n!}$. On montre (*c'est un exercice intéressant*) que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, mais que sa série de Taylor a un rayon de convergence nul, donc n'est convergente que pour $x = 0$. Ici encore (mais pour des raisons différentes de l'exemple précédent), il n'existe donc aucun $r > 0$ pour lequel f est DSE sur $]-r, r[$.

Remarque. Si une fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{K}$ est DSE et paire, alors ses coefficients d'indice impair sont nuls. Si elle est impaire, ses coefficients d'indice pair sont nuls. *En effet, si* $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est paire sur* $]-r, r[$ *avec* $r > 0$*, alors pour tout* k *entier,* $f^{(2k)}$ *est paire et* $f^{(2k+1)}$ *est impaire, et en particulier* $a_{2k+1} = \dfrac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} = 0$.

2. Les formules de Taylor.

Une méthode pour obtenir des développements en série entière est d'utiliser des formules de Taylor "globales". Revoyons les différentes formules de Taylor au programme.

Formule de Taylor-Young (locale). Si $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors elle admet en tout point a de I un développement limité à l'ordre n, qui s'écrit:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o\big((x-a)^n\big) .$$

Cette dernière formule est "locale" dans le sens où elle donne seulement des informations sur la fonction f au voisinage du point a, elle permet d'obtenir des **développements limités**, mais c'est une notion différente de celle de développement en série entière.

Formule de Taylor avec reste intégral (globale). Si $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors pour tous points a et x dans I, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n \, f^{(n+1)}(t)}{n!} \, \mathrm{d}t .$$

Preuve facile par récurrence sur n en intégrant par parties dans le reste intégral.

Inégalité de Taylor-Lagrange (globale). Si $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors pour tous points a et x dans I, on a

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \frac{M_{n+1} \, |x-a|^{n+1}}{(n+1)!} ,$$

en posant $M_{n+1} = \max\limits_{t \in [a,x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$.

Preuve facile en majorant le reste intégral dans la formule précédente.

Formule de Taylor avec reste de Parmentier (hors programme et à oublier très vite!).
Sous des hypothèses qui restent encore assez nébuleuses, on peut écrire que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \text{ des patates }.$$

3. Développements des fonctions usuelles.

a. La "famille" exponentielle.

On sait déjà que, pour tout z complexe, on a $\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

En particulier, la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.}$$

On en déduit les développements en série entière des fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique, qui sont respectivement la partie paire et la partie impaire de l'exponentielle. Détaillons pour ch:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{2}\,\frac{x^n}{n!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

puisque les termes de degré impair sont nuls. Résumons donc:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.}$$

On en déduit aussi les développements des fonctions cosinus et sinus "ordinaires" puisque $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. Je ne détaille pas:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.}$$

b. La "famille" géométrique.

Partons de l'expression de la somme d'une série géométrique convergente: si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| < 1$, alors $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$. En particulier, la fonction de variable réelle $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ avec $\boxed{\forall x \in]-1,1[\qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.}$

On a déjà vu au paragraphe **III.2.** comment on en déduisait deux autres développements en série entière usuels: $\boxed{\textbf{(1):} \quad \forall x \in]-1,1[\qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},}$ et

$$\boxed{\textbf{(2) :}\quad \forall x\in\,]-1,1[\qquad \mathrm{Arctan}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.}$$

Remarque. Les relations **(1)** et **(2)** restent vraies pour $x=1$, autrement dit on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln(2)\qquad\text{et}\qquad\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\mathrm{Arctan}(1)=\frac{\pi}{4}\ .$$

Ces deux égalités (dont la connaissance n'est pas officiellement exigible) ont déjà été obtenues en exercice dans le cours sur les séries numériques. On peut les retrouver à partir des développements en série entière **(1)** et **(2)** sur $]-1,1[$ en faisant tendre la variable x vers 1 par valeurs inférieures, ce qui nécessite un argument de convergence uniforme pour l'interversion somme-limite, *c'est un exercice classique, utile à connaître.*

c. Le développement de $(1+x)^\alpha$.

Soit α un réel, soit la fonction $f_\alpha : x\mapsto(1+x)^\alpha$. Comme la définition de f_α équivaut à la formule $f_\alpha(x)=e^{\alpha\,\ln(1+x)}$, son ensemble de définition est $]-1,+\infty[$. Nous allons montrer que f_α est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Remarque. Remarquons que, dans le cas particulier où α est un **entier naturel**, alors f_α est une fonction polynomiale, donc est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et, dans ce cas particulier, elle est évidemment DSE sur $\mathbb{R}$ puisque son développement en série entière n'est autre que le développement du polynôme $(1+X)^\alpha$ par la formule du binôme de Newton:

$$\text{si }\alpha\in\mathbb{N}\ ,\quad\text{alors}\quad\forall x\in\mathbb{R}\qquad(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{n}x^n\ .$$

Supposons maintenant $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$. La fonction f_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et, par une récurrence facile, on obtient

$$\forall x\in]-1,+\infty[\quad\forall n\in\mathbb{N}\qquad f_\alpha^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\,(1+x)^{\alpha-n}\ .$$

La série de Taylor de f_α est alors la série entière $\sum_{n\geq0}a_nx^n$, avec

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad a_n=\frac{f_\alpha^{(n)}(0)}{n!}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\ .$$

Remarque 1. Noter que $a_0=1$ par convention (un produit vide au numérateur).

Remarque 2. Pour α réel et n entier naturel, certains utilisent la notation

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},$$

un "coefficient binomial généralisé" en quelque sorte. Pourquoi pas, mais j'utiliserai peu cette notation. Le lecteur, en revanche, est invité à comprendre pourquoi il est impossible de donner un sens à la notation $\alpha!$ lorsque α n'est pas un entier naturel. Fin de la remarque.

Supposant toujours $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, la série de Taylor de f_α a pour rayon de convergence 1. En effet,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha - n}{n+1} \quad \text{donc, pour } n \text{ assez grand ,} \quad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n-\alpha}{n+1} \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 1$$

et la règle de d'Alembert montre que $R = 1$. Nommons alors s la fonction somme de la série de Taylor de f_α:

$$\forall x \in \,]-1,1[\qquad s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n \; .$$

L'objectif est de montrer que $s = f_\alpha$ sur $]-1,1[$. On sait que s est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ puisque, par construction, elle est DSE sur $]-1,1[$. Nous allons montrer que s est solution, sur cet intervalle, d'une équation différentielle.

On a obtenu plus haut la relation $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\alpha-n}{n+1}$, soit **(*)**: $(n+1)a_{n+1} = (\alpha-n)a_n$. Par un tour de passe-passe dont votre professeur a le secret, cette relation liant deux coefficients consécutifs de la série entière va se transformer en une équadiff! Zou, c'est parti!

Je commence par multiplier chaque membre de **(*)** par x^n, ainsi

$$\forall x \in \,]-1,1[\quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+1)a_{n+1}\, x^n = (\alpha-n)a_n\, x^n \; .$$

Je somme maintenant pour n allant de 0 à l'infini (je dirais bien "et au-delà", mais soyons sérieux!), ceci est justifié pour $x \in]-1,1[$ car les séries entières entrant en jeu ont toutes pour rayon de convergence 1 (en effet, les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont le même rayon de convergence par théorème). On obtient

$$\forall x \in \,]-1,1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha-n)a_n\, x^n \; ,$$

soit

$$\forall x \in \,]-1,1[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \; ,$$

soit enfin

$$\forall x \in \,]-1,1[\qquad s'(x) = \alpha\, s(x) - x\, s'(x) \; .$$

La fonction s est donc solution, sur $]-1,1[$, de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $(1+x)\,y' - \alpha\, y = 0$, ou $y' = \dfrac{\alpha}{1+x}\, y$, dont les solutions sont

$$y(x) = C\, e^{\alpha\ \ln(1+x)} = C\,(1+x)^\alpha \; , \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R} \; .$$

Comme enfin $s(0) = a_0 = 1$, on conclut que

$$\forall x \in \,]-1,1[\qquad s(x) = (1+x)^\alpha = f_\alpha(x) \; ,$$

ce qu'il fallait démontrer. En conclusion,

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \,]-1,1[\qquad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!}\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.}$$