Normes, suites convergentes, normes équivalentes.

1. On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. On note B_1 et B_∞ les boules unités fermées de $\mathbb{R}^n$ pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ respectivement, soit

$$B_1 = \left\{y \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|y\|_1 \leq 1\right\} \qquad \text{et} \qquad B_\infty = \left\{y \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|y\|_\infty \leq 1\right\} .$$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|x\|_1 = \max_{y \in B_\infty}(x|y) \qquad \text{et} \qquad \|x\|_\infty = \max_{y \in B_1}(x|y) .$$

2. Soient N et N' deux normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

a. On note $\overline{B}$ et $\overline{B}'$ les boules unités fermées, i.e.

$$\overline{B} = \left\{x \in E \mid N(x) \leq 1\right\} \qquad \text{et} \qquad \overline{B}' = \left\{x \in E \mid N'(x) \leq 1\right\} .$$

Montrer que $\overline{B} = \overline{B}' \Longrightarrow N = N'$.

b. Même question avec les boules unités ouvertes B et B'.

3. Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2}$.

Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que l'on a

$$\forall (A,B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2 \qquad \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\| .$$

4. Pour toute matrice A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \displaystyle\max_{1 \leq i \leq n}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$.

a. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que l'on a $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\|_\infty = \displaystyle\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Prouver la relation $\|AX\|_\infty \leq \|A\|\,\|X\|_\infty$.

d. Montrer que toute valeur propre réelle λ de la matrice A vérifie $|\lambda| \leq \|A\|$.

5. Soit $E = \mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$. Pour $f \in E$, on pose $N_\infty(f) = \displaystyle\max_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

a. Soit $g \in E$ telle que $\forall x \in [0,1] \quad g(x) \neq 0$. Pour tout $f \in E$, on pose $N_g(f) = N_\infty(fg)$. Montrer que N_g est une norme sur E, et qu'elle est équivalente à la norme N_∞.

b. Soit $g : x \mapsto x - \dfrac{1}{2}$; l'application N_g définie comme ci-dessus est-elle une norme sur E ? Si oui, est-elle équivalente à la norme N_∞ ?

6. Soit l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^2\big([0,1], \mathbb{R}\big)$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \; ; \quad N'(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \; ; \quad N''(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x .$$

a. Montrer que N, N' et N'' sont des normes sur E.

b. Montrer les inégalités $N \leq N' \leq N''$.

c. Ces trois normes sont-elles équivalentes ?

7. Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$.

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n$, on pose $\|X\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

a. Montrer que $\|AX\|_\infty \leq n\,\|A\|\,\|X\|_\infty$.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la suite $\left(\|A^k\|\right)_{k\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Montrer que les valeurs propres de A sont de module inférieur ou égal à 1.

8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels, de carré sommable, i.e. telle que la série $\sum u_n^2$ converge. Montrer que la série $\sum \dfrac{u_n}{n}$ est convergente, et prouver l'existence d'une constante positive C (indépendante du choix de la suite (u_n)) telle que

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}\right| \leq C \cdot \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Quelle est "la meilleure" constante C possible ?

9. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $p \in [1, +\infty[$, on pose $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

10. Soient $a_1, \cdots, a_n$ des réels. À quelle condition l'application $N : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$N : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto a_1|x_1| + \cdots + a_n|x_n|$$

définit-elle une norme sur $\mathbb{K}^n$?

11. Soit a un réel. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^n$, avec $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a}{n} \\ \dfrac{a}{n} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Topologie.

12. Soit E un espace vectoriel normé, soit F un sous-espace vectoriel de E.

Deux questions indépendantes

a. Montrer que l'adhérence $\overline{F}$ de F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Montrer que, si F admet un point intérieur, alors $F = E$.

13. Soient p_1 et p_2 les applications coordonnées sur $\mathbb{R}^2$ définies par $p_1(x,y) = x$ et $p_2(x,y) = y$.

a. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Montrer que les ensembles $p_1(U)$ et $p_2(U)$ sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}$.

b. Soit $H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 1\right\}$. Montrer que H est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. Les ensembles $p_1(H)$et $p_2(H)$ sont-ils fermés dans $\mathbb{R}$?

Limites et continuité des fonctions vectorielles de variable vectorielle

14. Étudier la limite éventuelle en $(0,0)$ des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(0,0)\right\} \to \mathbb{R}$ ci-dessous:

a. $(x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$; **b.** $(x,y) \mapsto \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$; **c.** $(x,y) \mapsto \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$. On définit l'application $g : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \to \mathbb{R}$ par $g(x, y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Montrer que g est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que son graphe $\Gamma = \Big\{\big(x, f(x)\big)\ ;\ x \in \mathbb{R}\Big\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. Réciproque ? *Considérer* $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *prolongée par la valeur 0 en 0.*

17. Soit A une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit a et b deux points de A, et y un réel tel que $f(a) \leq y \leq f(b)$.

Montrer qu'il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

18. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = P$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} B^k = Q$.

a. Montrer que P et Q sont des matrices de projecteurs. Calculer AP et PA.

b. On suppose que A et B commutent. Montrer que P et Q commutent.

19*. On rappelle que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b. Le résultat reste-t-il vrai quand on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

20. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $d_n : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto d_n(A) = \det A$, est continue.

b. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

c. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique. *On étudiera d'abord le cas particulier où A est inversible.*

21. Soit $\big(E, \|\cdot\|\big)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, soit K une partie fermée bornée de E, soit $f : K \to K$ une application telle que

$$\forall (x, y) \in K^2 \qquad x \neq y \Longrightarrow \big\|f(x) - f(y)\big\| < \|x - y\| \ .$$

Montrer que f admet un unique point fixe dans K. *On pourra considérer l'application δ définie sur K par $\delta(x) = \big\|f(x) - x\big\|$.*

22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose que A admet au moins une valeur propre réelle, et on note $\sigma(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de A. Soit $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$.

a. Montrer que l'application $X \mapsto |X^\top AX|$ admet un maximum sur l'ensemble

$$S = \big\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid X^\top X = 1\big\} \ .$$

b. Montrer que $\rho(A) \leq \max\limits_{X \in S} |X^\top AX|$.