CORRIGÉ du D.M. de MATHÉMATIQUES numéro 4
PSI2 2024-2025

PARTIE A.

A.1. En effectuant par exemple les opérations élémentaires $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, on obtient, pour tout réel x,

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ -4 & x+2 & 6 \\ 2 & -2 & x-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 \\ x-2 & x+2 & 6 \\ 0 & -2 & x-4 \end{vmatrix} = (x-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & x+3 & 6 \\ 0 & -2 & x-4 \end{vmatrix} .$$

Un développement par rapport à la première colonne donne alors

$$\chi_f = \chi_A = (X-2)\left[(X+3)(X-4)+12\right] = X(X-1)(X-2) .$$

L'endoorphisme f de $\mathbb{R}^3$ (ou bien la matrice A) admet trois valeurs propres distinctes (ou encore a un polynôme caractéristique scindé à racines simples), donc est diagonalisable.

A.2. On recherche donc les sous-espaces propres de A (ou de f), on trouve

$E_0(f) = \mathrm{Vect}(v_1)$, avec $v_1 = (1, -1, 1)$;

$E_1(f) = \mathrm{Vect}(v_2)$, avec $v_2 = (3, 0, 2)$;

$E_2(f) = \mathrm{Vect}(v_3)$, avec $v_3 = (1, 1, 0)$;

Ainsi, en posant $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, il s'agit bien d'une base puisque ce sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, et on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D = \mathrm{diag}(0, 1, 2)$.

Remarque. Il y a bien sûr d'autres choix possibles pour la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire pour la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ puisque l'on peut permuter les vecteurs propres (en permutant alors aussi les valeurs propres) ou remplacer un vecteur propre par un vecteur qui lui est colinéaire.

A.3. On a $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = PDP^{-1}$, avec $\mathcal{B}_0$ base canonique de $\mathbb{R}^3$, puis pour tout m entier naturel non nul, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f^m) = A^m = PD^mP^{-1}$. Des calculs, *laissés au vaillant lecteur*, donnent $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, puis $D^m = \mathrm{diag}(0, 1, 2^m)$, et enfin

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f^m) = A^m = \begin{pmatrix} 2^{m+1}-3 & 3-2^m & 6-3\times 2^m \\ 2^{m+1} & -2^m & -3\times 2^m \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} .$$

A.4. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, soit $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, d_3)$, ici $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$. On vérifie que $(DM)_{i,j} = d_i m_{i,j}$ et $(MD)_{i,j} = d_j m_{i,j}$. *Cela correspond à des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes: en multipliant M à gauche par une matrice diagonale, les lignes de M sont multipliées par les coefficients de la diagonale, tandis qu'en multipliant M à droite, on a les mêmes multiplications sur les colonnes de M.* Les d_i **étant distincts**, l'égalité $DM = MD$ a lieu si et seulement si $m_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$, autrement dit si et seulement si M est une matrice diagonale.

A.5. Si une matrice H vérifie $H^2 = D$, alors elle commute avec D puisque $HD = DH = H^3$, donc elle est diagonale d'après la question précédente: $H = \mathrm{diag}(h_1, h_2, h_3)$. On a alors $H^2 = D$ si et seulement si $h_1^2 = 0$, $h_2^2 = 1$, $h_3^2 = 2$, ce qui donne quatre possibilités: $H = \mathrm{diag}(0, \pm 1, \pm\sqrt{2})$.

Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, notons H sa matrice dans la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$. Puisque $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$, on a $h^2 = f$ si et seulement $H^2 = D$, donc si et seulement si H est l'une des quatre matrices diagonales décrites ci-dessus. Sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de

$\mathbb{R}^3$ est alors $M = PHP^{-1}$, où H est toujours l'une des quatre matrices diagonales décrites ci-dessus. Un calcul (laissé à l'estimable lecteur) donne les quatre matrices M suivantes:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}-3 & 3-\sqrt{2} & 6-3\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_2 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}-3 & 3+\sqrt{2} & 6+3\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$M_3 = -M_1 \quad ; \quad M_4 = -M_2 \; .$$

PARTIE B.

B.1. On a $J^2 = 3J$ puis, par récurrence immédiate, $J^m = 3^{m-1}J$ pour $m \in \mathbb{N}^*$.

B.2. On a $A = I_3 + J$, les deux matrices commutant évidemment, ce qui autorise à appliquer la formule du binôme de Newton:

$$A^m = (I_3+J)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} J^k = I_3 + \left[\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} 3^{k-1}\right] J = I_3 + \frac{4^m-1}{3} J \; .$$

Le terme $k = 0$ doit être mis de côté car la relation $J^k = 3^{k-1}J$ n'est pas vraie pour $k = 0$.

Mais $A^0 = I_3 = I_3 + \dfrac{4^0-1}{3} J$, donc la formule est encore vraie pour $m = 0$.

En termes d'endomorphismes, on a bien $f^m = \mathrm{id}_E + \dfrac{4^m-1}{3} u$ pour tout m entier naturel.

B.3. On a facilement $\chi_f = \chi_A = (X-1)^2(X-4)$, donc $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda, \mu\}$ avec $\lambda = 1$ et $\mu = 4$, $\lambda < \mu$. *On peut aussi éviter le calcul du polynôme caractéristique, en remarquant par exemple que $A - I_3 = J$ est de rang 1.*

B.4. On observe que $f^m = \left(\mathrm{id}_E - \dfrac{1}{3}u\right) + 4^m \cdot \dfrac{1}{3}u = \lambda^m p + \mu^m q$, avec $p = \mathrm{id}_E - \dfrac{1}{3}u$ et $q = \dfrac{1}{3}u$, d'où l'existence de p et q.

Par ailleurs, si p et q vérifient les conditions demandées, pour $m = 0$ et $m = 1$, on obtient le système $\begin{cases} p+q &= \mathrm{id}_E \\ p+4q &= f \end{cases}$, ce qui détermine entièrement p et q, par exemple sous la forme $p = \dfrac{1}{3}(4\,\mathrm{id}_E - f)$ et $q = \dfrac{1}{3}(f - \mathrm{id}_E)$, on a donc l'unicité.

Comme les endomorphismes id_E et u (ou bien id_E et f) sont linéairement indépendants, les expressions obtenues ci-dessus pour p et q montrent que ces deux endomorphismes ne sont pas colinéaires. *On peut aussi voir que les matrices* $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $Q = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *canoniquement associées à p et q, sont non colinéaires.*

B.5. Par exemple à partir des expressions obtenues en fonction de id_E et u et de la relation $u^2 = 3u$, on a rapidement

$$p^2 = p \quad ; \quad q^2 = q \quad ; \quad p \circ q = q \circ p = 0 \; .$$

Remarque. On constate donc que p et q sont des projecteurs "associés", i.e. tels que $p+q=\mathrm{id}_E$, ce qui revient aussi à dire que $\mathrm{Ker}(q)=\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q)=\mathrm{Ker}(p)$.

Si $h=\alpha p+\beta q$, alors $h^2=\alpha^2p^2+\alpha\beta(p\circ q+q\circ p)+\beta^2q^2=\alpha^2p+\beta^2q$. La famille (p,q) étant libre, on a alors

$$h^2=f \iff \alpha^2p+\beta^2q=p+4q \iff \big(\alpha^2=1 \text{ et } \beta^2=4\big) \iff h=\pm p\pm 2q\ .$$

Ce n'est pas très joliment écrit, mais on trouve quatre solutions. Plus clairement,

$$\mathcal{R}(f)=\big\{p+2q\ ,\ p-2q\ ,\ -p+2q\ ,\ -p-2q\big\} \quad \text{est de cardinal 4.}$$

B.6. $E_1(f)=\mathrm{Vect}(w_1,w_2)$, $E_4(f)=\mathrm{Vect}(w_3)$, avec $w_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $w_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $w_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

On peut dire aussi que $E_1(f)$ est le plan d'équation cartésienne $x+y+z=0$. La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 3, donc f est diagonalisable. La famille $\mathcal{B}=(w_1,w_2,w_3)$ est une base de vecteurs propres de f (*ce n'est bien sûr pas le seul choix possible!*). Alors $D=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)=\mathrm{diag}(1,1,4)$. Même si ce n'est pas explicitement demandé, on peut donc diagonaliser la matrice A en écrivant $A=UDU^{-1}$ avec $U=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

Comme $p=\dfrac{1}{3}(4\,\mathrm{id}_E-f)$ et $q\dfrac{1}{3}(f-\mathrm{id}_E)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)=\dfrac{1}{3}(4I_3-D)=\mathrm{diag}(1,1,0)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q)=\dfrac{1}{3}(D-I_3)=\mathrm{diag}(0,0,1)$.

B.7. Pour K, toute matrice de symétrie dans le plan fera l'affaire, par exemple $K=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

Ensuite, $Y=\begin{pmatrix}K&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ convient.

B.8. Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice Y. Comme on a $Y^2=D=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, on a $h^2=f$, donc $h\in\mathcal{R}(f)$. Mais h n'est pas combinaison linéaire de p et q, sinon sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ serait combinaison linéaire des matrices de p et q dans cette même base $\mathcal{B}$ et serait donc diagonale, ce qui n'est pas le cas. Donc $\mathcal{R}(f)\not\subset\mathrm{Vect}(p,q)$.

B.9. L'endomorphisme f est diagonalisable, et a pour valeurs propres 1 et 4, il admet donc pour polynôme annulateur $(X-1)(X-4)$, donc $(f-\mathrm{id}_E)\circ(f-4\,\mathrm{id}_E)=0$. Si $h\in\mathcal{R}(f)$, alors $h^2=f$, donc $(h^2-\mathrm{id}_E)\circ(h^2-4\,\mathrm{id}_E)=0$, autrement dit h admet pour polynôme annulateur $(X^2-1)(X^2-4)=(X-1)(X+1)(X-2)(X+2)$, qui est scindé à racines simples, donc h est diagonalisable d'après le cours.

PARTIE C.

C.1. Soit $x\in E$ tel que $f^{p-1}(x)\neq 0_E$, un tel vecteur existe d'après les hypothèses. Supposons **(E):** $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1}\lambda_i f^i(x)=0_E$ où les λ_i sont des scalaires non tous nuls. Soit k le plus petit indice pour lequel λ_k est non nul: $k=\min\big\{i\in[\![0,p-1]\!]\mid \lambda_i\neq 0\big\}$. La relation **(E)** s'écrit alors

$\sum_{i=k}^{p-1} \lambda_i f^i(x) = 0_E$. En appliquant f^{p-1-k}, on obtient $\lambda_k f^{p-1}(x) + \sum_{i=k+1}^{p-1} \lambda_i f^{p+i-(k+1)}(x) = 0_E$, soit simplement $\lambda_k f^{p-1}(x) = 0_E$, ce qui est absurde puisque $\lambda_k \neq 0$ et $f^{p-1}(x) \neq 0_E$. L'hypothèse de départ est donc absurde, autrement dit la seule combinaison linéaire de la famille $\bigl(x, f(x), \cdots, f^{p-1}(x)\bigr)$ qui est nulle est celle dont tous les coefficients sont nuls, donc cette famille de vecteurs, de cardinal p, est libre.

On a donc $p \leq n = \dim(E)$, alors $f^p = 0$ entraîne $f^n = f^{n-p} \circ f^p = 0$.

C.2. Si $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$, soit $h \in \mathcal{R}(f)$. On a alors $h^2 = f$, donc $h^{2p} = f^p = 0$, ainsi h est nilpotent, et en appliquant **C.1.**, on a $h^n = 0$. Mais on a aussi $h^{2p-2} = f^{p-1} \neq 0$. Donc $2p - 2 < n$ ou, ce qui revient au même, $2p - 1 \leq n$.

C.3. La fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{1+x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, elle admet donc un développement limité à tout ordre en 0, et en particulier un "DL fort" à l'ordre $n-1$, i.e. avec un reste en $O(x^n)$, ce qui apporte une meilleure précision qu'un $o(x^{n-1})$. Les coefficients de ce DL sont aussi les coefficients du développement en série entière de cette fonction φ (i.e. de sa série de Taylor), qui est de la forme $x \mapsto (1+x)^\alpha$, avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Donc $a_0 = 1$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$a_k = \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-3}{2}\right)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!} .$$

C.4. De la définition de la relation de domination O, on déduit que $\sqrt{1+x} = P_n(x) + x^n \gamma(x)$, où γ est une fonction bornée au voisinage de 0. En élevant au carré, cela donne

$$1 + x = P_n(x)^2 + 2x^n P_n(x)\gamma(x) + x^{2n}\gamma(x)^2 = P_n(x)^2 - x^n \eta(x) ,$$

avec $\eta(x) = -2P_n(x)\gamma(x) - x^n\gamma(x)^2$, ce qui est bien une fonction bornée au voisinage de 0, comme somme et produit de fonctions bornées au voisinage de 0. Autrement dit, on a bien $P_n(x)^2 - x - 1 = x^n \eta(x)$.

Soit le polynôme $Q_n = P_n^2 - X - 1$, on a $Q_n(x) = O(x^n)$ au voisinage de zéro, ce qui entraîne que ce polynôme ne comporte pas de terme en X^k avec $k < n$ (*une fonction polynomiale étant équivalente au voisinage de 0 à son terme de plus bas degré*), donc qu'il est multiple du polynôme X^n. On posera alors $Q_n = X^n R_n$.

C.5. Dans l'identité polynomiale $P_n^2 - X - 1 = X^n R_n$, on substitue à l'indéterminée X l'endomorphisme f, cela donne $P_n(f)^2 - f - \mathrm{id}_E = f^n \circ R_n(f) = 0$ puisque l'on a $f^n = 0$. L'endomorphisme $h = P_n(f)$ vérifie donc $h^2 = f + \mathrm{id}_E$, i.e. $h \in \mathcal{R}(f + \mathrm{id}_E)$.

De façon plus générale, $P_n(\alpha f)^2 - \alpha f - \mathrm{id}_E = (\alpha f)^n \circ R_n(\alpha f) = \alpha^n f^n \circ R_n(\alpha f) = 0$, donc l'endomorphisme $P_n(\alpha f)$ appartient à $\mathcal{R}(\alpha f + \mathrm{id}_E)$.

Si $\beta > 0$, alors l'ensemble $\mathcal{R}\Bigl(\dfrac{1}{\beta} f + \mathrm{id}_E\Bigr)$ est non vide. Si h appartient à cet ensemble, on a $h^2 = \dfrac{1}{\beta} f + \mathrm{id}_E$ et l'endomorphisme $k = \sqrt{\beta}\, h$ vérifie $k^2 = f + \beta\,\mathrm{id}_E$, donc $k \in \mathcal{R}(f + \beta\,\mathrm{id}_E)$.

PARTIE D.

D.1. Si l'endomorphisme f est trigonalisable avec pour seule valeur propre λ, il est représenté dans une certaine base de E par une matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux valent λ, son polynôme caractéristique donc $\chi_f = (X-\lambda)^n$. Le théorème de Cayley-Hamilton donne
$$\chi_f(f) = (f - \lambda\,\mathrm{id}_E)^n = 0\ .$$

D.2. Posons $g = f - \lambda\,\mathrm{id}_E$, alors $g^n = 0$, donc g est nilpotent. De la question **C.5.**, on déduit que $\mathcal{R}(g + \lambda\,\mathrm{id}_E) \neq \emptyset$, autrement dit $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$, l'endomorphisme f admet des racines carrées.

PARTIE E.

E.1. Par récurrence sur k: l'initialisation pour $k=1$ est facile puisque $X_1 = X$. Si la relation est vraie pour un $k \in \mathbb{N}^*$ donné, alors
$$\begin{pmatrix} A & X \\ 0_{1,n} & \lambda \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} A^k & X_k \\ 0_{1,n} & \lambda^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & X \\ 0_{1,n} & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & A^k X + \lambda X_k \\ 0_{1,n} & \lambda^{k+1} \end{pmatrix}\ ,$$
et on vérifie que
$$A^k X + \lambda X_k = \Big(A^k + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda^{k-j} A^j\Big) X = \Big(\sum_{j=0}^{k} \lambda^{k-j} A^j\Big) X = X_{k+1}\ ,$$
ce qui achève la récurrence.

E.2. Posons $z = \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j} a^j$. Si $a = \lambda$, alors $z = p\,a^{p-1} \neq 0$. Sinon, on a $a^p \neq \lambda^p$ et une identité remarquable du cours de première année donne la relation $z = \dfrac{\lambda^p - a^p}{\lambda - a} \neq 0$.

E.3. Posons $T = \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j} A^j$. Il est facile de montrer que, pour tout j entier naturel, la matrice A^j est triangulaire supérieure avec pour coefficients diagonaux les $a_{i,i}^j$ $(1 \leq i \leq n)$. La matrice T est alors aussi triangulaire supérieure avec pour coefficients diagonaux les $t_{i,i} = \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} \lambda^{p-1-j} a_{i,i}^j$ $(1 \leq i \leq n)$, et ces coefficients $t_{i,i}$ sont tous non nuls d'après la question précédente, donc T est inversible, par exemple car $\det(T) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} t_{i,i} \neq 0$.

E.4. Soit $(\mathcal{P}_n)$ la propriété à démontrer par récurrence.

• Pour $n = 1$, si $B \in \mathcal{T}_1(\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$, alors $B = (b)$, où b est un complexe non nul. Ce complexe b admet dans $\mathbb{C}$ une racine p-ième a non nulle et $\dfrac{a}{a} = 1 \notin \mathcal{V}_p$, donc $A = (a)$ convient.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $(\mathcal{P}_n)$ vrai.

Soit alors $B \in \mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$. On peut clairement écrire B sous la forme $B = \begin{pmatrix} C & Y \\ 0_{1,n} & \beta \end{pmatrix}$ avec $C \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $\beta \in \mathbb{C}^*$.

Par l'hypothèse de récurrence, il existe $A \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^p = C$ et $\dfrac{a_{i,i}}{a_{j,j}} \notin \mathcal{V}_p$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Soit $b \in \mathbb{C}$ une racine p-ième de β, on a alors, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, d'après **E.1.**,

$$\begin{pmatrix} A & X \\ 0_{1,n} & b \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} A^p & X_p \\ 0_{1,n} & b^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & X_p \\ 0_{1,n} & \beta \end{pmatrix} \quad , \quad \text{avec} \quad X_p = \left(\sum_{j=0}^{p-1} b^{p-1-j} A^j \right) X \ .$$

Il reste à voir si l'on peut se débrouiller pour avoir $X_p = Y$. Il suffit pour cela que la matrice $T = \displaystyle\sum_{j=0}^{p-1} b^{p-1-j} A^j$ soit inversible, on posera alors $X = T^{-1}Y$. Et, pour que T soit inversible, il suffit d'après **E.3.** que l'on ait $\dfrac{a_{i,i}}{b} \notin \mathcal{V}_p$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Deux cas se présentent:

- si $a_{i,i}^p \neq \beta$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, alors on peut choisir pour b une quelconque des p racines p-ièmes de β, on aura toujours $a_{i,i}^p \neq b^p$ donc $\dfrac{a_{i,i}}{b} \notin \mathcal{V}_p$;

- s'il existe un indice $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $a_{i,i}^p = \beta$, choisissons $b = a_{i,i}$, ainsi $\dfrac{a_{i,i}}{b} = 1 \notin \mathcal{V}_p$ et, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{a_{j,j}}{b} = \dfrac{a_{j,j}}{a_{i,i}} \notin \mathcal{V}_p$.

Ainsi, la récurrence est achevée: on a pu construire $A' = \begin{pmatrix} A & X \\ 0_{1,n} & b \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_{n+1}(\mathbb{C})$ telle que $(A')^p = B$ et $\forall (i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2 \quad \dfrac{a'_{i,i}}{a'_{j,j}} \notin \mathcal{V}_p$.

Cela prouve que toute matrice complexe triangulaire supérieure et inversible admet une racine p-ième triangulaire supérieure.

E.5. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on sait que A est trigonalisable: il existe $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $A = PTP^{-1}$. D'après **E.4.**, il existe $U \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ telle que $U^p = T$. Alors en posant $B = PUP^{-1}$, on a $B^p = PU^pP^{-1} = PTP^{-1} = A$. Ainsi, A admet une racine p-ième.