DM de MATHÉMATIQUES numéro 4 COMMENTAIRES
PSI2 2024-2025

Dans ce sujet sur la réduction des endomorphismes, les copies sont souvent de meilleure qualité que pour les DM précédents. Quelques erreurs de méthode subsistent toutefois, notamment dans la partie B, pourtant assez facile.

B.4. C'est probablement cette question qui a été le plus souvent mal rédigée. J'ai en effet vu de nombreux raisonnements par "analyse-synthèse" qui s'avèrent faux.

La partie "analyse" est censée montrer l'unicité de p et q (sous réserve d'existence). Or, le fait de constater qu'un certain couple (p, q) "convient" de façon évidente ne prouve que l'**existence** d'un tel couple, et certainement pas son unicité! L'argument "par identification", lu sur certaines copies, m'a plutôt fait sourire... Cela est parfois suivi d'une "synthèse" où, en fait, vous réécrivez la même chose et, finalement, vous démontrez deux fois l'existence de p et q, et jamais leur unicité.

B.5. Quelques calculs lourds et sans recul parce que la relation $u^2 = 3u$ n'a pas toujours été exploitée. Les relations demandées s'écrivent $p^2 = p$, $q^2 = q$, $p \circ q = q \circ p = 0$, car en fait p et q sont des projecteurs "associés", ce qui signifie que $q = \mathrm{id}_E - p$ (ou encore que $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p)$). Si cela n'a pas été vu, les calculs deviennent inextricables et sont souvent abandonnés en cours de route.

Pour passer de $\alpha^2 p+\beta^2 q = p+4q$ au système $\begin{cases} \alpha^2 = 1 \\ \beta^2 = 4 \end{cases}$, il faut impérativement mentionner l'indépendance linéaire de p et q.

B.7. On demande de "déterminer **une**" matrice K telle que $K^2 = I_2$, on ne demande pas de les trouver **toutes**, il est donc inutile d'écrire un système et d'essayer de le résoudre par des équivalences qui, de plus, deviennent très rapidement fausses!

C.2. Des démonstrations parfois fausses où vous esssayez de construire une famille libre de vecteurs comme en **C.1.** (il y a alors de nombreuses erreurs sur le cardinal de cette famille). Si un endomorphisme h appartient à $\mathcal{R}(f)$, il vérifie alors $h^{2p-2} = f^{p-1} \neq 0$ et $h^{2p} = f^p = 0$, son indice de nilpotence vaut alors, **soit** $2p - 1$, **soit** $2p$.

C.4. Des manipulations de la relation de domination O pas toujours convaincantes.

Il n'est pas évident a priori que la fonction η soit polynomiale. Pour obtenir la relation $P_n^2 - X - 1 = X^n Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, il faut donc travailler un peu sur les propriétés des polynômes et des fonctions polynomiales associées: une fonction polynomiale est équivalente en 0 à son terme de plus bas degré.