Rayon de convergence.

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$, avec

a. $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$; **b.** $a_n = n^{(-1)^n}$; **c.** $a_n = \dbinom{2n}{n}$; **d.** $a_n = \lfloor 10^n \pi \rfloor - 10 \times \lfloor 10^{n-1}\pi \rfloor$

(dans le **d.**, le coefficient a_n est la n-ème décimale du nombre π).

- -

a. On a $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{e}$, donc $R = e$ par la règle de d'Alembert.

b. On a $a_n = n$ si n est pair, $a_n = \dfrac{1}{n}$ si n est impair. Dans les deux cas, $\dfrac{1}{n} \leq a_n \leq n$ pour tout $n \geq 1$. Les séries entières $\sum nx^n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n}$ ayant toutes deux pour rayon de convergence 1 (par application immédiate de la règle de d'Alembert), on déduit, par comparaison, que $R = 1$.

c. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\dbinom{2n+2}{n+1}}{\dbinom{2n}{n}} = \dfrac{(2n+2)!}{\big((n+1)!\big)^2}\,\dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1}$ après quelques simplifications. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 4$, puis $R = \dfrac{1}{4}$.

d. La suite (a_n) est bornée puisque $0 \leq a_n \leq 9$, donc $R \geq 1$ en revenant à la définition du rayon de convergence. La série $\sum a_n$ diverge grossièrement car il est bien connu que le nombre π n'est pas décimal (il est même irrationnel), donc les a_n ne peuvent être tous nuls à partir d'un certain rang, on trouve donc dans la suite (a_n) une infinité de termes plus grands que 1, cette suite ne peut donc tendre vers zéro. On en déduit que $R \leq 1$. Finalement $R = 1$.

---

2. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$.

a. Soit P un polynôme non nul. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} P(n)\, a_n\, z^n$.

b. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^2 z^n$.

- -

a. Allons-y par petites touches : d'abord, si deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont telles que $a_n \sim b_n$, alors elles ont le même rayon de convergence, c'est du cours.

Si P est un polynôme constant non nul, la série entière $\sum P(n) a_n z^n$ a aussi pour rayon de convergence R (*évident*). Si P est un polynôme de degré $d > 0$, on a $P(n)\, a_n \sim C\, n^d\, a_n$, où C est une constante non nulle (le coefficient dominant du polynôme P), il suffit donc de montrer que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} n^d\, a_n\, z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$. Je pourrais bien sûr rédiger une solution détaillée, mais je préfère aller me promener dans la forêt (il paraît qu'il y a des champignons!), puisqu'il suffit en fait de reprendre la démonstration du cours sur les séries dérivées : on a vu en effet que la série $\sum n\, a_n\, z^n$ a le même rayon de convergence R que la série $\sum a_n z^n$ puisque c'est (presque) sa série dérivée, il suffit donc d'itérer d fois ce raisonnement.

b. On sait que $R = \sup(J)$, avec $J = \big\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\big\}$. Le rayon de convergence R' de $\sum a_n z^{2n}$ est $R' = \sup(J')$, avec $J' = \big\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n r^{2n}) \text{ est bornée}\big\}$. Or, $r \in J' \iff r^2 \in J$, donc l'intervalle J' est constitué exactement des racines carrées des éléments de J, puis $R' = \sqrt{R}$.

De même, le rayon de convergence R'' de $\sum a_n^2\, z^n$ est $R'' = \sup(J'')$, avec

$$J'' = \big\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n^2\, r^n) \text{ est bornée}\big\} = \big\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } \big(a_n\, (\sqrt{r})^n\big) \text{ est bornée}\big\}\ .$$

En effet, une suite est bornée si et seulement si la suite des carrés est bornée. Donc $r \in J'' \iff \sqrt{r} \in J$, l'intervalle J'' est constitué exactement des carrés des éléments de J, d'où $R'' = R^2$.

Attention! Il aurait été faux de commencer la démonstration par : “la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{R}$ ”...!!! Je rappelle qu'il n'y a pas de réciproque à la règle de d'Alembert, le quotient $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ pouvant très bien ne pas avoir de limite, ou tout simplement ne pas être défini pour de nombreuses valeurs de n si la série entière comporte des coefficients nuls!

---

3. Soit une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence non nul. Montrer que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{a_n\, z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

- -

Puisque la première série entière a un rayon de convergence non nul, il existe un $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée : $|a_n|\, r^n \leq M$. On en déduit une majoration des coefficients par une suite géométrique : $|a_n| \leq \dfrac{M}{r^n}$, avec $M > 0$ et $r > 0$. Il en résulte la majoration $\left|\dfrac{a_n}{n!}\right| \leq \dfrac{M}{n!\, r^n}$ et, comme la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!\, r^n}$ a un rayon de convergence infini (c'est une série exponentielle), par comparaison, la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{a_n\, z^n}{n!}$ a aussi un rayon de convergence infini.

---

4. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
On pose $b_n = \dfrac{a_n}{1 + |a_n|}$. Soit R' le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$.

a. Montrer que $R' \geq \max\{1, R\}$.

b. Lorsque $R' > 1$, montrer que $R' = R$.

c. En déduire que $R' = \max\{1, R\}$.

- -

a. On a $|b_n| = \dfrac{|a_n|}{1+|a_n|} \leq 1$, donc $R' \geq 1$ par comparaison (car le rayon de convergence de la série géométrique $\sum 1\ z^n$ est 1). Mais on a aussi $|b_n| \leq |a_n|$ donc, par comparaison, $R' \geq R$. Finalement, $R' \geq \max\{1, R\}$.

b. Si $R' > 1$, alors la série $\sum b_n$ converge, donc $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puis $|a_n| = \dfrac{|b_n|}{1-|b_n|} \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$, et d'après le cours, les deux séries entières ont alors le même rayon de convergence.

c. Lorsque $R' > 1$, alors $R = R' > 1$, donc $\max\{1, R\} = R$ et on a bien $R' = \max\{1, R\}$.

Lorsque $R' \leq 1$, on a nécessairement $R' = 1$ d'après le **a.**, puis $\max\{1, R\} \leq 1$, donc $\max\{1, R\} = 1 = R'$.

5.a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les inégalités $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq n^n$.

b. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} n! a_n z^n$ ait un rayon de convergence non nul est que $\sqrt[n]{|a_n|} = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

- -

a. On a $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n \leq n \times n \times \cdots \times n = n^n$ (même nombre de facteurs).

L'autre inégalité est moins facile : la fonction ln étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a, pour tout entier $k \geq 2$, l'inégalité $\ln k \geq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln x \, \mathrm{d}x$. En sommant ces inégalités pour k de 2 à n, cela donne

$$\ln(n!) = \sum_{k=2}^{n} \ln k \geq \int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x = n\ \ln n - n + 1 \geq n\ \ln n - n\ ,$$

puis en prenant l'exponentielle (fonction croissante), on obtient $n! \geq \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

b. Procédons par double implication :

• Si le rayon de convergence R de la série entière $\sum n! a_n z^n$ est strictement positif, alors il existe $r > 0$ tel que la suite $\big(n!|a_n|r^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, soit $n!|a_n|r^n \leq M$ pour tout entier n. On en déduit, pour tout n, la majoration $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \dfrac{\sqrt[n]{M}}{r\ \sqrt[n]{n!}}$, puis en utilisant l'inégalité $n! \geq \left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ obtenue en **a.**, on déduit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \dfrac{e}{r\ n}\ \sqrt[n]{M}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{M} = 1$, la suite $\big(\sqrt[n]{M}\big)_n$ est bornée, puis $\sqrt[n]{|a_n|} = O\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.

• Réciproquement, si $\sqrt[n]{|a_n|} = O\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$, autrement dit s'il existe $M \geq 0$ tel que $n\ \sqrt[n]{|a_n|} \leq M$ pour tout entier n, alors pour tout $r > 0$, on a

$$n!\ |a_n|\ r^n \leq n!\ \left(\frac{Mr}{n}\right)^n \leq (Mr)^n$$

(la deuxième inégalité en utilisant $n! \leq n^n$). La série géométrique $\sum (Mr)^n$ converge pour

$r < \dfrac{1}{M}$, donc la série $\sum n!|a_n|r^n$ converge pour tout r tel que $0 < r < \dfrac{1}{M}$ par comparaison de séries à termes positifs, donc la série entière $\sum n!a_n z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $\dfrac{1}{M}$, donc non nul.

Expression de la somme d'une série entière.

6. On pose $a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{1}{3^n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et calculer sa somme.

- -

a. *Remarquons d'abord que la règle de d'Alembert ne peut être ici d'aucun secours, la suite* $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ *n'ayant pas de limite (ses termes d'indice pair tendent vers* 0 *et ses termes d'indice impair tendent vers* $+\infty$*).*

Utilisons la relation $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$. On a $a_{2p}r^{2p} = \left(\dfrac{r}{2}\right)^{2p}$ et $a_{2p+1}r^{2p+1} = \left(\dfrac{r}{3}\right)^{2p+1}$, la suite $(v_n) = (a_n r^n)$ est bornée si et seulement si les deux suites extraites (v_{2p}) et (v_{2p+1}) sont bornées, c'est-à-dire si et seulement si ($r \leq 2$ et $r \leq 3$), autrement dit si $r \leq 2$. Le rayon de convergence de la série entière est donc $R = 2$.

b. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 2$ (appartenant au disque de convergence), on a alors

$$\begin{aligned} f(z) &:= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} z^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p+1} z^{2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^{2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{z^2}{4}\right)^{p} + \frac{z}{3} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{z^2}{9}\right)^{p} \\ &= \frac{1}{1-\dfrac{z^2}{4}} + \frac{z}{3}\,\frac{1}{1-\dfrac{z^2}{9}} = \frac{36+12z-4z^2-3z^3}{(4-z^2)(9-z^2)}\,. \end{aligned}$$

Remarquons que, dans cet exemple, l'ensemble de définition de la fonction somme f est exactement le disque de convergence (disque ouvert de rayon 2) : en effet, si z est un nombre complexe de module 2, alors la série $\sum_{p\geq 0} a_{2p}z^{2p}$ diverge et la série $\sum_{p\geq 0} a_{2p+1}z^{2p+1}$ converge, donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est divergente (somme d'une série divergente et d'une série convergente).

7. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!}$.

a. Montrer que la suite (a_n) converge et donner sa limite.

b. Rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, x^n$?

c. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Calculer $(1-x)\, f(x)$. En déduire l'expression de $f(x)$.

- -

a. La série de terme général $\frac{1}{(2k)!}$ est convergente (*évident*), et (a_n) est la suite de ses sommes partielles. Donc la suite (a_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} = \mathrm{ch}(1) = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)$.

b. On a $\lim_{n\to+\infty} a_n = \mathrm{ch}(1) \in\,]1,2[$, donc l'inégalité $1 \leq a_n \leq 2$ est vraie pour n assez grand ; on en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n\, x^n$ est au moins égal à celui de la série $\sum 2\, x^n$, et au plus égal à celui de la série $\sum x^n$, donc il est égal à 1.

c. Pour $x \in\,]-1,1[$ (intervalle de convergence), on a

$$\begin{aligned}
(1-x)\, f(x) &= (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}\, x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n-1})\, x^n\ .
\end{aligned}$$

Or, $a_0 = 1 = \frac{1}{0!}$ et, pour $n \geq 1$, $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{(2n)!}$, donc $(1-x)\, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ pour tout $x \in\,]-1,1[$. Pour $x \in [0,1[$, on peut alors écrire $(1-x)\, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(\sqrt{x})$, tandis que, pour $x \in\,]-1,0]$, on écrira $(1-x)\, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, (\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{-x})$.
On a finalement

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\sqrt{-x})}{1-x} & \text{si} \quad x \in\,]-1,0]\ ; \\[2ex] \dfrac{\mathrm{ch}(\sqrt{x})}{1-x} & \text{si} \quad x \in [0,1[\ ; \end{cases}$$

8. Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n-1)}$.

- -

Posons $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n-1)}$. Pour $x \neq 0$, on a $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \dfrac{2n(2n-1)}{(2n+1)(2n+2)} x^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x^2$. Par la règle de d'Alembert sur les séries numériques à termes positifs, on déduit que la série $\sum u_n(x)$ converge absolument lorsque $|x| < 1$ et diverge grossièrement lorsque $|x| > 1$. Le rayon de convergence de la série entière est donc 1. Posons $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ pour $x \in I =]-1, 1[$ (intervalle de convergence). On a alors, sur I, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1}$, puis

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^{2n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = -\frac{1}{1+x^2} .$$

Comme $f'(0) = 0$ (pas de terme constant dans le développement en série entière de $f'(x)$), on obtient $f'(x)$ sur I en primitivant terme à terme: $f'(x) = -\operatorname{Arctan}(x)$, que l'on aurait d'ailleurs pu reconnaître directement puisque c'est un des développements en série entière au programme. Comme $f(0) = 0$, on a ensuite $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x \operatorname{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t$. Par une intégration par parties, on obtient

$$\forall x \in I \qquad f(x) = -\Big[t \operatorname{Arctan}(t)\Big]_0^x + \int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - x \operatorname{Arctan}(x) .$$

Remarque. Les fonctions u_n sont continues sur $[-1,1]$, et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[-1,1]$ puisque $\|u_n\|_{\infty,[-1,1]} = \dfrac{1}{2n(2n-1)}$ est le terme général d'une série convergente. On en déduit que la fonction somme f est définie et continue sur $[-1,1]$, ce qui permet de calculer une somme de série numérique:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n(2n-1)} = f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - x \operatorname{Arctan}(x)\right) = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\pi}{4} .$$

---

9. Rayon de convergence et calcul de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} x^n$ (*on cherchera une équation différentielle vérifiée par la fonction somme de cette série*).

- -

Posons $a_n = \dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$, alors $a_n > 0$ et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(2n+2)!}{\big((n+1)!\big)^2} \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4$.

De la règle de d'Alembert, on déduit que le rayon de convergence est $R = \dfrac{1}{4}$.

Pour $x \in I =]-R, R[$, on a $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$. Or, on vient d'obtenir entre les coefficients a_n la relation $(n+1)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$. En multipliant cette relation par x^n, et en sommant ensuite pour n de 0 à l'infini (toutes les séries entières entrant en jeu ont le même rayon de convergence $R = \frac{1}{4}$), on obtient

$$\forall x \in I \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \ ,$$

soit $S'(x) = 4x\, S'(x) + 2\, S(x)$, autrement dit la fonction S est solution sur l'intervalle de convergence I de l'équation différentielle linéaire du premier ordre **(E)** : $(1-4x)y' - 2y = 0$. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $y = \frac{C}{\sqrt{1-4x}}$. Avec la condition initiale $S(0) = 1$, on obtient

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\qquad S(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \ .$$

---

10. Une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 1 \quad ; \quad \forall n \geq 2 \quad u_n = -u_{n-1} + 2\, u_{n-2} + 3^n \ .$$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq u_n \leq 3^{n+1}$.

b. Rayon de convergence et calcul de la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} u_n x^n$.

- -

a. Par récurrence "double" sur n : c'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$. Soit $n \geq 2$, si l'inégalité est vraie aux rangs $n-2$ et $n-1$, autrement dit si $0 \leq u_{n-2} \leq 3^{n-1}$ et $0 \leq u_{n-1} \leq 3^n$, alors $-3^n \leq -u_{n-1} \leq 0$ et, par addition d'inégalités de même sens :

$$-3^n + 2 \times 0 + 3^n \leq u_n = -u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3^n \leq 0 + 2 \times 3^{n-1} + 3^n \ ,$$

donc

$$0 \leq u_n \leq 5 \times 3^{n-1} \leq 9 \times 3^{n-1} = 3^{n+1} \ ,$$

et l'inégalité reste donc vraie au rang n.

b. De $u_n \leq 3^{n+1}$, on tire $R \geq \frac{1}{3}$: en effet, le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} u_n z^n$ est au moins égal à celui de la série géométrique $\sum_{n\geq 0} 3^{n+1} z^n = 3 \sum_{n\geq 0} (3z)^n$.

Calculons donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ pour $x \in I = \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$. Pour $x \in I$, on reprend la relation de récurrence vérifiée par (u_n), on multiplie par x^n, on somme, et on assaisonne avant de servir :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n x^n = -\sum_{n=2}^{+\infty} u_{n-1}\, x^n + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} u_{n-2}\, x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} 3^n x^n \ ,$$

soit

$$f(x)-(x+1)=-x\sum_{n=1}^{+\infty}u_nx^n+2x^2\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n+\sum_{n=2}^{+\infty}(3x)^n\ ,$$

soit encore

$$f(x)-(x+1)=-x\big(f(x)-1\big)+2x^2\,f(x)+\frac{9x^2}{1-3x}\ ,$$

ou encore

$$(1+x-2x^2)\,f(x)=2x+1+\frac{9x^2}{1-3x}\ ,$$

donc finalement

$$\forall x\in I\qquad f(x)=\frac{3x^2-x+1}{(3x-1)(2x+1)(x-1)}\ .$$

Notons enfin que $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^-}f(x)=+\infty$, on ne peut donc pas prolonger f en une fonction continue sur un intervalle $]-r,r[$, avec $r>\dfrac{1}{3}$, ce qui montre que le rayon de convergence de la série entière est exactement $R=\dfrac{1}{3}$.

Remarque. On pouvait aussi traiter l'exercice en cherchant une expression explicite de u_n : les suites solutions de l'équation de récurrence linéaire sans second membre $u_n+u_{n-1}-2\,u_{n-2}=0$ sont de la forme $u_n=A+B\cdot(-2)^n$, car l'équation caractéristique r^2+r-2 admet pour racines 1 et -2, on ajoute une solution particulière de l'équation avec second membre par exemple $u_n=\dfrac{9}{10}\cdot 3^n$, et on détermine les constantes grâce aux "conditions initiales", on obtient

$$u_n=-\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cdot(-2)^n+\frac{9}{10}\cdot 3^n\ ,$$

d'où, pour tout $x\in I$,

$$f(x)=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}x^n+\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}(-2x)^n+\frac{9}{10}\sum_{n=0}^{+\infty}(3x)^n=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-x}+\frac{3}{5}\,\frac{1}{1+2x}+\frac{9}{10}\,\frac{1}{1-3x}\ ,$$

ce qui, avec un peu de chance, donne le même résultat.

---

11. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}R_nx^n$.

- -

On sait que la série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et a pour somme $\ln 2$. Notons S_n la somme partielle d'ordre n : $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Ainsi, $R_n=\ln 2-S_n$. Comme

$\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$, la suite (R_n) est bornée et le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} R_n x^n$ est au moins égal à 1. La somme $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} R_n x^n$ est donc définie (au moins) sur l'intervalle $]-1,1[$. Calculons $f(x)$ pour $x \in]-1,1[$, nous montrerons ensuite que $R = 1$. Pour $x \in]-1,1[$, on peut écrire (toutes les séries mentionnées sont alors convergentes) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(\ln 2 - S_n)x^n = (\ln 2)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n \\ &= \frac{\ln 2}{1-x} - \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\Big)x^n\ . \end{aligned}$$

On reconnaît maintenant l'expression d'un produit de Cauchy : en posant $a_0 = 0$, $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ pour $n \geq 1$, et $b_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, les séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n x^n$ ont toutes deux pour rayon de convergence 1 donc, pour $x \in]-1,1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\Big)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\Big)x^n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\Big) = \ln(1+x)\times\frac{1}{1-x}\ .$$

Pour $x \in]-1,1[$, on a donc $f(x) = \dfrac{\ln 2 - \ln(1+x)}{1-x}$. On voit alors que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$, cela montre que le rayon de convergence R de la série entière est exactement 1 (si on avait $R > 1$, la fonction f serait définie et continue sur un intervalle $]-R,R[$ contenant -1 comme point intérieur, donc f serait bornée au voisinage du point -1).

---

12. Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre de couples $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $p + 5q = n$. Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$. Donner une expression de a_n en fonction de n en utilisant une partie entière.

- -

Soit R le rayon de convergence ; on a $a_n \geq 1$ puisque le couple $(p,q) = (n,0)$ convient manifestement donc, par comparaison à la série entière $\sum x^n$ de rayon de convergence 1, on déduit $R \leq 1$; par ailleurs, $a_n \leq n$ donc, par comparaison à la série entière $\sum n\, x^n$ qui a aussi pour rayon de convergence 1, on déduit $R \geq 1$. Finalement, $R = 1$.

En notant $b_k = 1$ pour tout k entier naturel, puis $c_l = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 5 \mid l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, on constate que a_n est le nombre de multiples de 5 inférieurs ou égaux à n, soit $a_n = \sum\limits_{l=0}^{n} c_l$, soit encore $a_n = \sum\limits_{k+l=n} b_k c_l = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}$, autrement dit que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{k\geq 0} b_k x^k$ et $\sum_{l\geq 0} c_l x^l$. Ces séries entières ont toutes pour rayon de convergence 1, et on a, pour tout $x \in\,]-1,1[$, $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$ et $\sum_{l=0}^{+\infty} c_l x^l = \sum_{m=0}^{+\infty} x^{5m} = \dfrac{1}{1-x^5}$. Finalement,

$$\forall x \in\,]-1,1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{+\infty} c_l x^l\right) = \frac{1}{(1-x)(1-x^5)}\ .$$

On observe facilement que $a_n = 1 + \left\lfloor \dfrac{n}{5} \right\rfloor$.

---

13. Soit $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

a. Ensemble de définition de f ?

b. Exprimer $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles sur $]-1,1[$.

c. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

- -

a. On reconnaît une série entière de rayon de convergence 1 (par exemple par la règle de d'Alembert). D'autre part, cette série entière converge normalement sur $[-1,1]$ puisque la série à termes positifs $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n(n-1)}$ est convergente. Donc $D_f = [-1,1]$.

b. En décomposant en éléments simples, et en utilisant le fait que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = \ln(1+x)$ pour $x \in\,]-1,1[$, on obtient, toujours pour $x \in\,]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) x^n \;=\; x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{n-1}}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{n} \\
&= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n} \\
&= x\, \ln(1+x) + \big(\ln(1+x) - x\big) \;=\; (1+x)\, \ln(1+x) - x\ .
\end{aligned}$$

c. Comme la série définissant f converge normalement sur $[-1,1]$ et que chacune des fonctions est continue, la somme f est continue sur $[-1,1]$. On a donc

$$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2\, \ln(2) - 1 \qquad \text{et} \qquad f(-1) = \lim_{x\to(-1)^+} f(x) = 1\ .$$

Propriétés de la fonction somme.

14. On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ pour tout réel x tel que la série converge.

a. Quel est l'ensemble de définition de f ?

b. Montrer que f est continue sur $[-1, 1[$.

c. Quelle est la limite de f en 1^- ?

- -

a. La fonction f est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1 (évident, par exemple par la règle de d'Alembert), donc $]-1, 1[\subset D_f \subset [-1, 1]$. Or, la série diverge pour $x = 1$ (série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2}$), et elle converge pour $x = -1$ (série alternée vérifiant les hypothèses du théorème spécial, puisque la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante et tend vers 0). Ainsi, $D_f = [-1, 1[$.

b. D'après le cours sur les séries entières, la fonction somme f est continue sur l'intervalle de convergence $]-1, 1[$, il reste donc à prouver la continuité (à droite) au point -1. Pour cela, montrons en fait la continuité de f sur le segment $[-1, 0]$. Si on pose $u_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour $x \in [-1, 0]$, on peut écrire $u_n(x) = (-1)^n \frac{|x|^n}{\sqrt{n}}$, et la suite $\left(\frac{|x|^n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers zéro. Le théorème spécial permet donc d'affirmer que le reste $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ est majoré, en valeur absolue, par le premier terme négligé, i.e. $\left|r_n(x)\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. La dernière majoration est "uniforme" et permet d'écrire que $\|r_n\|_{\infty,[-1,0]} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a donc prouvé la convergence uniforme, sur $[-1, 0]$, de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$. Comme chaque fonction u_n est continue sur $[-1, 0]$, la fonction somme f l'est aussi par théorème, ce qui permet de conclure.

c. La fonction f est croissante sur $[0, 1[$ (comme somme de fonctions croissantes). D'après le théorème de la limite monotone, elle admet donc une limite au point 1 dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si cette limite était finie, disons $\lim_{x\to 1^-} f(x) = l \in \mathbb{R}_+^*$, on aurait alors, par croissance de f, $\forall x \in [0, 1[\quad f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}} \leq l$. Comme on travaille sur une série à termes positifs, toute somme partielle est majorée par la somme globale, donc cela impliquerait

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0, 1[\qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{\sqrt{k}} \leq l\ .$$

En fixant n, on pourrait faire tendre x vers 1 dans cette inégalité, soit $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq l$.

Mézalor, la série à termes positifs $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$, dont les sommes partielles seraient majorées, serait convergente, ce qui n'est pas. On a obtenu une contradiction.

On conclut que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

---

15. On admet $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Donner un équivalent, lorsque $x \to 1^-$, de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$.

- -

Tout d'abord, en posant $u_n(x) = x^{n^2}$, on a $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |x|^{2n+1}$, qui tend vers 0 lorsque $|x| < 1$ et vers l'infini lorsque $|x| > 1$, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum x^{n^2}$ vaut 1, et la fonction somme f est définie sur $D_f =]-1,1[$ (série grossièrement divergente pour $x = \pm 1$).

Fixons maintenant $x \in]0,1[$, alors la fonction $t \mapsto x^{t^2} = e^{t^2 \ln x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a les inégalités

$$\int_n^{n+1} x^{t^2}\,\mathrm{d}t \leq x^{n^2} \leq \int_{n-1}^{n} x^{t^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

En sommant ces inégalités pour n de 1 à l'infini (la série est convergente, donc les intégrales impropres sont aussi convergentes par le théorème de comparaison série-intégrale), on obtient

$$\int_1^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

Posons $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t^2|\ln x|}\,\mathrm{d}t$; le changement de variable $u = t\,\sqrt{|\ln x|}$ donne $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|\ln x|}} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{|\ln x|}}$. On a bien sûr $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 1^-}{\sim} g(x)$ puisque la différence $\displaystyle\int_0^1 x^{t^2}\,\mathrm{d}t$ est majorée par 1, elle est donc négligeable devant $g(x)$ qui tend vers l'infini lorsque x tend vers 1. Finalement, par le théorème d'encadrement, on conclut que

$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{|\ln x|}} \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}\ .$$

---

16. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, non nulle, et N-périodique avec $N \in \mathbb{N}^*$.

a. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$?

b. Montrer que la fonction somme de cette série entière est une fonction rationnelle.

- -

a. La suite (a_n) ne tend pas vers zéro: en effet, il y a au moins un coefficient non nul a_{n_0}, et on a alors $a_{n_0+kN} = a_{n_0}$ pour tout k entier naturel. Donc la série $\sum a_n$ diverge grossièrement, et cela entraîne $R \leq 1$.

D'autre part la suite (a_n) est périodique, donc bornée, et cela entraîne $R \geq 1$: en effet, si $|a_n| \leq M$, le rayon de convergence R est au mooins égal à celui de la série géométrique $\sum Mx^n$, qui vaut 1.

Finalement, $R = 1$.

b. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n &= \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n + \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{n+N} + \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{n+2N} + \cdots \\ &= \left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n\right)\left(1 + z^N + z^{2N} + \cdots\right) \\ &= \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n}{1 - z^N},\end{aligned}$$

et la somme est une fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynomiales).

Développement en série entière.

17. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et que, pour tout n, on peut écrire, sur $\mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) f(x)$, où P_n est une fonction polynomiale.

b. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier naturel n.

c. La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de zéro ?

- -

a. La fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Montrons que, sur $\mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x)$ est de la forme demandée par récurrence sur n.

La propriété est vraie pour $n = 0$ avec $P_0 = 1$ (polynôme constant).

Supposons que, pour n donné, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$. Alors

$$f^{(n+1)}(x) = \left[-\frac{1}{x^2}\,P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}\,P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right]\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

donc, en posant $P_{n+1}(X) = -X^2\,P_n'(X) + 2X^3\,P_n(X)$, nous avons

$$f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

et P_{n+1} est une fonction polynomiale, ce qui achève la démonstration.

Plus précisément $\deg(P_{n+1}) = \deg(P_n)+3$ *et* $\deg(P_0) = 0$ *donc, pour tout* n, $\deg(P_n) = 3n$. *De plus, si* a_n *est le coefficient dominant de* P_n*, nous avons* $a_{n+1} = 2a_n$ *et* $a_0 = 1$ *donc pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2^n$*. Enfin en écrivant*

$$P_n(x) = e^{x^2} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

et en remarquant que, f *étant paire,* $f^{(n)}$ *a la même parité que* n*, nous voyons que* P_n *a la même parité que* n*.*

b. Le problème se situe en 0. Commençons par montrer que pour tout polynôme P,

$$\lim_{x\to 0} P\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0\ .$$

Il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$. Or, en posant $t = \dfrac{1}{x^2}$ ou $x = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ pour $t > 0$, nous avons effectivement (*on utilise ensuite la parité*) :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \qquad \text{car} \qquad \lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}}\, e^{-t} = 0.$$

On en déduit donc que, pour tout n entier naturel, on a $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$.

Montrons alors par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car $\lim\limits_{x\to 0} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$. De plus, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et, d'après ce qui précède, $\lim\limits_0 f' = 0$ donc (théorème de la limite de la dérivée) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0) = \lim\limits_0 f' = 0$. La propriété est donc vraie pour $n = 1$.

Supposons la propriété vraie pour n fixé et montrons-la pour $n+1$.
D'après l'hypothèse de récurrence $f^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$; comme elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et que $\lim\limits_0 f^{(n+1)} = \lim\limits_0 \left(f^{(n)}\right)' = 0$, alors $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\left(f^{(n)}\right)'(0) = 0$, c'est-à-dire f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n+1)}(0) = 0$, ce qui achève la preuve.
La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.

c. La série de Taylor de f en zéro est $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n\geq 0} 0\, x^n$ (elle a donc un rayon de convergence infini), et le seul point en lequel f s'annule est 0, c'est donc le seul point en lequel f coïncide avec la somme de sa série de Taylor. Donc f n'est développable en série entière dans aucun intervalle $]-r, r[$ avec $r > 0$.

---

18. On pose $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2^n x)}{n!}$.

a. Montrer que f est définie, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que sa série de Taylor en 0 a un rayon de convergence nul.

- -

a. Posons $u_n(x) = \dfrac{\cos(2^n x)}{n!}$. Alors les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $u_n^{(k)}(x) = \dfrac{2^{nk}}{n!} \cos\left(2^n x + k\dfrac{\pi}{2}\right)$. Ainsi, $\|u_n^{(k)}\|_\infty = \dfrac{(2^k)^n}{n!}$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \|u_n^{(k)}\|_\infty$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}$ (c'est une série exponentielle), il y a donc pour tout k convergence normale de la série $\displaystyle\sum_n u_n^{(k)}$, on peut donc affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout k entier naturel,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{nk}}{n!} \cos\left(2^n x + k\frac{\pi}{2}\right) .$$

b. En particulier, $f^{(k)}(0) = \cos\left(k\dfrac{\pi}{2}\right) \times \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{nk}}{n!}$, soit $f^{(2p)}(0) = (-1)^p \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4^p)^n}{n!} = (-1)^p\, e^{4^p}$ et $f^{(2p+1)}(0) = 0$. La série de Taylor de f en 0 est $\displaystyle\sum_{p\geq 0} \frac{(-1)^p e^{4^p}}{(2p)!} x^{2p}$. En posant $v_p(x) = \dfrac{(-1)^p e^{4^p}}{(2p)!} x^{2p}$, alors pour tout x non nul, on a

$$\left|\frac{v_{p+1}(x)}{v_p(x)}\right| = \frac{e^{4^{p+1}}\, x^{2p+2}}{(2p+2)!}\ \frac{(2p)!}{e^{4^p} x^{2p}} = \frac{e^{3\times 4^p}}{(2p+1)(2p+2)}\, x^2 \quad \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \quad +\infty ,$$

donc la série de Taylor de f a un rayon de convergence nul. Autrement dit, la fonction f n'est développable en série entière sur aucun voisinage de zéro.

---

19. Développer en série entière $f(x) = \ln\sqrt{1 - 2x\ \mathrm{ch}\, a + x^2}$, avec $a > 0$ fixé.

- -

Factorisons d'abord : $1-2x\,\mathrm{ch}\, a+x^2 = (x-e^a)(x-e^{-a})$. On a donc $D_f =]-\infty, e^{-a}[\cup]e^a, +\infty[$. Comme $0 < e^{-a} < e^a$, le plus grand intervalle centré en zéro sur lequel f est définie est $I =]-e^{-a}, e^{-a}[$. Nous allons montrer que f est développable en série entière sur cet intervalle, et expliciter son développement.

Pour $x \in I$, on peut écrire (*les facteurs* $x - e^a$ *et* $x - e^{-a}$ *sont tous deux négatifs!*):

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\left[\ln(e^a - x) + \ln(e^{-a} - x)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[a + \ln(1 - x\, e^{-a}) - a + \ln(1 - x\, e^a)\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n\, e^{-na}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n\, e^{na}}{n}\right) , \end{aligned}$$

en utilisant le développement $\ln(1-u) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n}$, valable pour $u \in]-1,1[$. Finalement,

$$\forall x \in I =]-e^{-a}, e^{-a}[\qquad f(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(na)}{n}\, x^n\ .$$

---

20. Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3$.

- -

Pour tout x réel, on a $(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$ (formule du binôme de Newton, tout simplement). Pour $x \in]-1,1[$, du développement de $(1+x)^\alpha$, on déduit le développement en série entière

$$(1-x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \cdots + \frac{(n+1)(n+2)}{2}\, x^n + \cdots \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2}\, x^n\ .$$

On multiplie les deux développements tout bêtement (l'un des deux est une somme finie), puis on effectue les translations d'indices nécessaires pour avoir partout des termes en x^n, on obtient

$$f(x) = \big(1 + 3x + 3x^2 + x^3\big) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2}\, x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\ ,$$

avec, pour $n \geq 3$,

$$a_n = \frac{1}{2}\Big[(n+1)(n+2) + 3n(n+1) + 3(n-1)n + (n-2)(n-1)\Big] = 4n^2 + 2\ .$$

Par ailleurs, $a_0 = 1$, $a_1 = 6$, $a_2 = 18$, d'où

$$\forall x \in]-1,1[\qquad f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (4n^2+2)\, x^n\ .$$

---

21. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x\ \mathrm{ch}\, x$.

a. Écrire la fonction f comme combinaison linéaire de quatre fonctions de la forme $x \mapsto e^{mx}$, où m est un coefficient complexe.

b. En déduire que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et expliciter son développement en série entière.

c*. Retrouver ce développement en utilisant un produit de Cauchy.

- -

a. On a $f(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \times \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{4}\Big(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} + e^{(-1+i)x} + e^{(-1-i)x}\Big)$.

b. On en déduit que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec

$$a_n = \frac{1}{4\,n!}\Big((1+i)^n + (1-i)^n + (-1+i)^n + (-1-i)^n\Big)\ .$$

On transforme: $(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\ e^{i\frac{n\pi}{4}}$, on procède de même pour les autres, ainsi

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{4\,n!}\left(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}} + e^{3i\frac{n\pi}{4}} + e^{-3i\frac{n\pi}{4}}\right)\\
&= \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{2\,n!}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{3n\pi}{4}\right)\\
&= \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n!}\ \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\ \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

Or, $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ est nul si n est un entier impair, il ne reste donc que les termes pairs, pour lesquels on pose $n = 2p$:

$$a_{2p} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{2p}}{(2p)!}\ \cos(p\pi)\ \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right) = \frac{2^p}{(2p)!}\ (-1)^p\ \cos\left(\frac{p\pi}{2}\right)\ .$$

De nouveau, il ne reste que les termes pour lesquels $p = 2q$, soit

$$a_{4q} = \frac{4^q}{(4q)!}\ \cos(2q\pi)\ \cos(q\pi) = \frac{4^q}{(4q)!}\ (-1)^q\ .$$

Ainsi, pour tout x réel, $f(x) = \cos(x)\ \mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-4)^q}{(4q)!}\ x^{4q}$.

c. Les fonctions cos et ch sont toutes deux développables en série entière sur $\mathbb{R}$ (rayons de convergence infinis), donc la fonction produit est aussi développable en série entière sur $\mathbb{R}$, son développement est alors fourni par le produit de Cauchy des deux précédents. Assez baratiné, allons-y :

$$\begin{aligned}
\cos x \cdot \mathrm{ch}\, x &= \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\ x^{2p}}{(2p)!}\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^{2q}}{(2q)!}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\sum_{p+q=n} \frac{(-1)^p\ x^{2p+2q}}{(2p)!\ (2q)!}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!\ (2n-2k)!}\right) x^{2n}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\ \binom{2n}{2k}\right)\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ .
\end{aligned}$$

Petit calcul auxiliaire : pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}\ z^{2k}$ et $v_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}\ z^{2k+1}$. On a alors (formule du binôme de Newton) :

$$u_n(z)+v_n(z)=\sum_{p=0}^{2n}\binom{2n}{p}\ z^p=(1+z)^{2n}\ ;$$

$$u_n(z)-v_n(z)=\sum_{p=0}^{2n}\binom{2n}{p}\ (-1)^p z^p=(1-z)^{2n}\ ,$$

d'où $u_n(z)=\dfrac{1}{2}\big((1+z)^{2n}+(1-z)^{2n}\big)$. En particulier,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}=u_n(i)=\frac{1}{2}\big((1+i)^{2n}+(1-i)^{2n}\big)=\frac{1}{2}\big((2i)^n+(-2i)^n\big)=\begin{cases}(-4)^p & \text{si} \quad n=2p\\ 0 & \text{si}\ \ n=2p+1\end{cases}.$$

On conclut : $\forall x\in\mathbb{R}\qquad f(x)=\cos x\cdot\operatorname{ch} x=\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-4)^p\ x^{4p}}{(4p)!}$.

Autres exercices.

22. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad\forall x\in\mathbb{R}\qquad\left|f^{(n)}(x)\right|\leq M\ .$$

Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

- -

L'inégalité de Taylor-Lagrange donne

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right|\leq M\ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

et le majorant, pour x réel fixé, tend vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$. Cela prouve que, pour tout x réel, la série $\displaystyle\sum_{n\geq0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge et a pour somme $f(x)$. Donc f est, sur $\mathbb{R}$ tout entier, somme de sa série de Taylor en zéro ; autrement dit, f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

23. Rechercher les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$(\mathbf{E})\ :\qquad 4x\,y''+2\,y'-y=0\ .$$

- -

Posons $y(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, somme d'une série entière de rayon de convergence $R>0$. Sur $I=]-R,R[$, on a

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\quad;\quad x\,y''(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n+1)a_{n+1}x^n\ .$$

En reportant dans **(E)**, cela donne

$$\forall x \in\,]-R,R[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\Big[(2n+1)(2n+2)a_{n+1}-a_n\Big]\,x^n=0\ .$$

L'unicité du développement en série entière permet d'écrire

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad (2n+1)(2n+2)a_{n+1}-a_n=0\ ,\quad \text{soit}\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}\ .$$

On en tire $a_n=\dfrac{a_0}{(2n)!}$, le coefficient a_0 restant arbitraire, ainsi $y(x)=a_0\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$. Le rayon de convergence est infini donc $I=\mathbb{R}$.

Pour exprimer y à l'aide de fonctions usuelles, distinguons deux cas:

- pour $x\geq 0$, posons $x=t^2$, soit $t=\sqrt{x}$, alors $y(x)=a_0\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}=a_0\,\mathrm{ch}(t)=a_0\,\mathrm{ch}\left(\sqrt{x}\right)$;

- pour $x\leq 0$, posons $x=-t^2$, soit $t=\sqrt{-x}$, alors $y(x)=a_0\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}=a_0\cos(t)=a_0\cos\left(\sqrt{-x}\right)$.

Les solutions de **(E)** développables en série entière (sur $\mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme $y=C\,y_0$, où C est une constante arbitraire et $y_0:x\mapsto\begin{cases}\cos\left(\sqrt{-x}\right) & \text{si}\quad x\leq 0\\ \mathrm{ch}\left(\sqrt{x}\right) & \text{si}\quad x\geq 0\end{cases}$.

Au passage, cela montre que la fonction y_0 introduite ci-dessus est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, ce qui n'avait rien d'évident a priori.

24*. Soit λ un réel tel que $|\lambda|<1$. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=f(\lambda x)\ .$$

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

- -

a. La fonction $x\mapsto f(\lambda x)$ est dérivable, donc f est D^2 (deux fois dérivable) et

$$f''(x)=\lambda\,f'(\lambda\,x)=\lambda\,f(\lambda^2\,x)\ .$$

Puis f'' est dérivable, donc f est D^3 et

$$f^{(3)}(x)=\lambda^{1+2}\,f'(\lambda^2\,x)=\lambda^3\,f'(\lambda^2\,x)=\lambda^3\,f(\lambda^3\,x)\ .$$

Par récurrence, on obtient que, pour tout n entier naturel, f est n fois dérivable et

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad\forall n\in\mathbb{N}\qquad f^{(n)}(x)=\lambda^{1+2+\cdots+(n-1)}\,f(\lambda^n\,x)=\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}\,f(\lambda^n\,x)\ .$$

Finalement, f est indéfiniment dérivable (de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$.

b. Soit A un réel strictement positif ; alors f est bornée sur le segment $[-A,A]$ car elle est continue sur ce segment :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in [-A, A] \qquad |f(x)| \leq M \ .$$

Comme $|\lambda| < 1$, on déduit de l'expression de $f^{(n)}$ obtenue ci-dessus que

$$\forall x \in [-A, A] \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f^{(n)}(x)| \leq M \ .$$

Pour $x \in [-A, A]$ toujours, l'inégalité de Taylor-Lagrange donne alors

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \right| \leq M\ \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0\ ,$$

donc $\forall x \in [-A, A] \quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$. Et ceci étant vrai pour tout $A > 0$, la fonction f est en fait somme de sa série de Taylor sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et son développement s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = f(0) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n!}\, x^n \ .$$

---

25. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On pose $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $|z| < R$.

a. Soit r tel que $0 < r < R$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N} \quad a_p r^p = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})\, e^{-ipt}\, \mathrm{d}t$.

En déduire que $|a_p| \leq \dfrac{M(r)}{r^p}$, où $M(r) = \displaystyle\max_{|z|=r} |f(z)|$.

b. *Application.* Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. On suppose que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

- -

a. Pour $p \in \mathbb{N}$ et $0 < r < R$, on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\, e^{it})\, e^{-ipt}\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{i(n-p)t} \Big)\, \mathrm{d}t$.

Or, la série numérique à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n$ converge puisque $0 < r < R$, ce qui entraîne la convergence normale sur le segment $[0, 2\pi]$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$, avec $u_n(t) = a_n r^n\, e^{i(n-p)t}$; on peut donc intégrer terme à terme, ce qui donne

$$\int_0^{2\pi} f(r\, e^{it})\, e^{-ipt}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}\, \mathrm{d}t = 2\pi\, a_p\, r^p \ .$$

En effet, si k est un entier relatif, on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ikt}\, \mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On obtient ainsi la **formule intégrale de Cauchy** qui permet de déterminer les coefficients a_p d'une série entière à partir de l'expression de la fonction somme sur le cercle de centre O et de rayon r, avec $r \in]0, R[$ donné : $a_p = \dfrac{1}{2\pi\, r^p} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\, e^{it})\, e^{-ipt}\, \mathrm{d}t$. Comme

$$\left| \int_0^{2\pi} f(r\, e^{it})\, e^{-ipt}\, \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| f(r\, e^{it}) \right| \mathrm{d}t \leq 2\pi\, M(r)\ ,$$

on déduit une majoration des coefficients : $|a_p| \leq \dfrac{M(r)}{r^p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $r \in]0, R[$.

b. On suppose $R = +\infty$ et $\forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \leq M$, alors $|a_p| \leq \dfrac{M}{r^p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $r \in \mathbb{R}_+^*$. Fixons p entier naturel non nul ; en passant à la limite $(r \to +\infty)$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient $|a_p| \leq 0$. Donc $a_p = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, et $f(z) = a_0$: f est une fonction constante.

26*. On veut montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos x}$ admet un développement en série entière au voisinage de 0. On raisonne par analyse-synthèse : supposons que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{2n}$ sur $]-R, R[$. Quelles relations doivent vérifier les coefficients a_n ? Préciser a_0, a_1 et a_2. Montrer que $|a_n| \leq 1$ pour tout n. Que peut-on en déduire sur le rayon de convergence ?

- -

Notons d'abord que la fonction f étant paire, il est logique de rechercher un éventuel développement ne comportant que des termes de degrés pairs. Supposons donc (**analyse**) que $f(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} a_p\, x^{2p}$ sur $]-R, R[$, avec $R > 0$. Comme $\cos x = \displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{(2q)!}\, x^{2q}$ (développement valable sur $\mathbb{R}$ tout entier), de la relation $\forall x \in I \quad f(x)\, \cos x = 1$, on tire

$$\forall x \in I \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{p+q=n} \frac{(-1)^q}{(2q)!} a_p \Big)\, x^{2n} = 1 \qquad \text{(produit de Cauchy)}\ ,$$

donc, en identifiant les coefficients (unicité du développement en série entière) : $a_0 = 1$, puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{p+q=n} \frac{(-1)^q}{(2q)!}\, a_p = 0\ , \quad \text{soit encore} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, a_{n-k} = 0\ .$$

Ainsi, $a_1 - \dfrac{1}{2}\, a_0 = 0$ et, comme $a_0 = 1$, on tire $a_1 = \dfrac{1}{2}$. Ensuite, $a_2 - \dfrac{1}{2}\, a_1 + \dfrac{1}{24}\, a_0 = 0$, d'où $a_2 = \dfrac{5}{24}$.

Remarque. Le lecteur pourra vérifier que le développement limité à l'ordre quatre au voisinage de 0 de f est bien

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{5}{24}\, x^4 + o(x^4)\ .$$

On obtient ainsi les a_n de proche en proche puisque, si $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ ont été déterminés, on a nécessairement $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}\, a_{n-k}$. Les coefficients a_n ainsi obtenus sont majorés par 1 en valeur absolue ; c'est vrai pour $n=0$, $n=1$, $n=2$, et si c'est vrai pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$ (récurrence forte), alors

$$|a_n|\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_{n-k}|}{(2k)!}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)!}\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)!}=\mathrm{ch}(1)-1\leq 1\ .$$

Synthèse : Considérons maintenant la suite de coefficients a_n définis par la récurrence (forte) :

$$a_0=1\quad\text{et}\qquad\forall n\in\mathbb{N}^*\quad a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}\,a_{n-k}=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-p+1}}{(2n-2p)!}\,a_p\ .$$

On a alors $|a_n|\leq 1$ pour tout n, donc la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0}a_nx^{2n}$ a un rayon de convergence R au moins égal à 1 (par comparaison avec la série entière "géométrique" $\displaystyle\sum_{n\geq 0}x^{2n}$ dont le rayon de convergence est 1). Posons alors $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,x^{2n}$ pour tout $x\in]-R,R[$. Comme les coefficients a_n vérifient les relations $a_0=1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\,a_{n-k}=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on en déduit (produit de Cauchy) que, pour tout $x\in]-R,R[$, on a $g(x)\cdot\cos x=1$, donc $\forall x\in]-R,R[\quad g(x)=\dfrac{1}{\cos x}=f(x)$. Notons que cela entraîne $R\leq\dfrac{\pi}{2}$.

On a en fait $R=\dfrac{\pi}{2}$, mais la preuve est plus difficile.

---

27. Soit $\sum a_nx^n$ une série entière de rayon de convergence 1, les coefficients a_n étant des réels positifs. On pose $s(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ pour $x\in]-1,1[$. On suppose que la fonction s est bornée sur $[0,1[$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}a_n$ est convergente, et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=\lim_{x\to 1^-}s(x)$.

- -

• La fonction s est positive sur $[0,1[$, on la suppose bornée, soit $M>0$ tel que $\forall x\in[0,1[\quad 0\leq s(x)\leq M$. Introduisons les sommes partielles $s_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$. Pour $x\in[0,1[$, on a $0\leq s_n(x)\leq s(x)\leq M$. L'inégalité $s_n(x)\leq M$ passe à la limite lorsque $x\to 1$ et donne $\forall n\in\mathbb{N}\quad\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k\leq M$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}a_n$ est donc convergente (série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées). On posera maintenant $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$.

• La fonction s est croissante et majorée sur $[0,1[$, elle admet donc une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, posons $l=\displaystyle\lim_{x\to 1^-}s(x)$.

Pour tout $x \in [0,1[$, on a $s_n(x) \leq s(x)$, on passe à la limite ($x \to 1^-$ avec n fixé), cela donne $s_n(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k \leq l$. On passe de nouveau à la limite ($n \to +\infty$), on obtient l'inégalité $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq l$.

Pour tout $x \in [0,1[$, on a $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$. On passe à la limite ($x \to 1^-$), cela donne $l \leq S$.

Finalement, $l = S$, c'est ce que l'on voulait démontrer.

Remarque. On pouvait traiter autrement la deuxième partie. En fait, la série de fonctions $\sum u_n$, avec $u_n(x) = a_n x^n$, converge normalement sur $[0,1]$ puisque $\|u_n\|_\infty = a_n$ et la série $\sum a_n$ converge d'après la première partie. Les fonctions u_n étant continues sur $[0,1]$, on en déduit que la fonction somme s est continue sur cet intervalle, en particulier au point 1, cela donne

$$\lim_{x \to 1^-} s(x) = s(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S\ .$$

---

28. Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de sommes respectives $f(x)$ et $g(x)$, avec $b_n > 0$ pour tout n. On suppose que le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$ est $R \in \mathbb{R}_+^*$ et que cette série diverge pour $x = R$.

a. On suppose $a_n = o(b_n)$. Montrer que $f(x) = o\big(g(x)\big)$ lorsque $x \to R^-$.

b. On suppose $a_n \sim b_n$. Montrer que $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \to R^-$.

- -

a. Il s'agit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in [R-\alpha, R[$, on ait $\big|f(x)\big| \leq \varepsilon\, g(x)$.

Soit donc $\varepsilon > 0$, comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Longrightarrow |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} b_n$.
Pour $x \in [0, R[$, on a alors

$$\begin{aligned}
\big|f(x)\big| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right| = \left|\sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n + \sum_{n=N}^{+\infty} a_n x^n\right| \\
&\leq \left|\sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n\right| + \sum_{n=N}^{+\infty} |a_n|\, x^n \leq \left|\sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n\right| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N}^{+\infty} b_n x^n \\
&\leq \left|\sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n\right| + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \left|\sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n\right| + \frac{\varepsilon}{2}\, g(x)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\lim_{x \to R^-} g(x) = +\infty$: *en effet, la fonction g est croissante sur $[0,R[$ donc elle* *admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en R^- et, si on avait $\lim\limits_{x\to R^-} g(x) = l < +\infty$, on aurait alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} b_n x^n \le \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = g(x) \le l$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, R[$, et en passant à la limite ($x \to R^-$) dans l'inégalité entre les termes extrêmes, on obtiendrait $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} b_n R^n \le l$ pour tout N, ce qui entraînerait la convergence de la série $\sum b_n R^n$, série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées, et ceci est absurde.* Donc le terme $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n$ (fonction polynomiale), qui reste borné au voisinage de R, est négligeable devant $g(x)$ lorsque $x \to R^-$. Pour x proche de R, disons si $R - \alpha \le x < R$ où α est un certain réel strictement positif, on a donc $\displaystyle\left|\sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\, g(x)$. Finalement, pour tout $x \in [R-\alpha, R[$, on a bien $\big|f(x)\big| \le \varepsilon\, g(x)$, ce que l'on voulait obtenir.

b. Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $a_n - b_n = o(b_n)$ quand $n \to +\infty$. De la question **a.**, il résulte alors que $f(x) - g(x) = o\big(g(x)\big)$ lorsque $x \to R^-$, ce qui signifie que $f(x) \underset{x\to R^-}{\sim} g(x)$.

---

29. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{e^x - 1}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

- -

Posons déjà $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, ainsi prolongée la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Soient maintenant $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $g(0) = h(0) = 1$ et, pour $x \ne 0$, $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ et $h(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$. Les fonctions g et h sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car elles sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$. En effet, $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$ et $h(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$. *L'improbable lecteur vérifiera que ces égalités restent vraies pour* $x = 0$. Par ailleurs, la fonction h ne s'annule pas, et $f = \dfrac{g}{h}$ est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, le dénominateur ne s'annulant pas.

---

30. Soit $\sum_{n=0} a_n x^n$ le développement en série entière de $\sqrt{1+x}$ pour $x \in]-1,1[$. Pour n entier naturel, on considère le polynôme $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

a. Montrer que le polynôme $T_n = S_n^2 - 1 - X$ est divisible par X^{n+1}.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre d, supposée nilpotente ($A^p = 0$). Montrer que la matrice $I_d + A$ admet une “racine carrée”.

- -

a. On sait que la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, donc $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-1,1[$. Le cours sur les produits de Cauchy permet d'affirmer que, sur cet intervalle, on a $1 + x = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$, avec $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j a_{k-j}$. Par unicité du développement en série entière, on a donc $c_0 = c_1 = 1$, et $c_k = 0$ pour $k \geq 2$.

Si on fixe un entier naturel n, les coefficients du polynôme $S_n^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)^2$ se calculent par la même formule jusqu'au rang n (*pas au-delà puisque la série entière* $\sum a_n x^n$ *a été tronquée à l'ordre* n *pour générer le polynôme* S_n). Le polynôme S_n^2 (de degré au plus $2n$) s'écrit donc sous la forme $S_n^2 = 1 + X + \sum_{k=n+1}^{2n} c'_k X^k$, où les c'_k, $(n+1 \leq k \leq 2n)$, sont des coefficients. Le polynôme $S_n^2 - 1 - X$ est bien multiple de X^{n+1}.

b. Soit p un entier naturel tel que $A^p = 0$. Dans l'identité polynomiale $S_{p-1}^2 - 1 - X = X^p R$ (où R est un certain polynôme), on substitue la matrice A à l'indéterminée X, cela donne $S_{p-1}(A)^2 - I_d - A = A^p\, R(A) = 0$. Donc la matrice $M = S_{p-1}(A)$ vérifie $M^2 = I_d + A$.

---

31. Démontrer la relation $\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$ pour n entier naturel.

- -

Hum hum cela ressemble à un produit de Cauchy! Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$ et allons faire un tour du côté de l'exercice 9! On y apprend que cette série entière a pour rayon de convergence $R = \frac{1}{4}$ et que, sur $]-R,R[$, on a $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$. Du coup, pour $x \in]-R,R[$, on a

$$f(x)^2 = \frac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} \right] x^n .$$

Mais comme, sur le même intervalle, on a aussi $\frac{1}{1-4x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^n x^n$, l'unicité du développement en série entière donne la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n \ .$$

Exercices avec Python.

32. Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{(1-x^3)(1-x^5)}$.

a. Montrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

b. On note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ ce développement en série entière. Écrire une fonction en langage Python qui calcule c_n, prenant n comme argument. Calculer c_n pour $n \in [\![0,199]\!]$.

c. Avec Python, comparer c_n et c_{n+15} pour $n \in [\![0,184]\!]$.

d. Pour tout n entier naturel, on pose $D_n = \big\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid 3p+5q=n\big\}$, et $d_n = \mathrm{Card}(D_n)$. Écrire une fonction Python prenant comme argument un entier naturel n et retournant la liste des éléments de l'ensemble D_n.

e. Vérifier expérimentalement la relation $c_n = d_n$, puis la démontrer.

f. Prouver alors la relation liant c_n et c_{n+15}.

g. Représenter sur un même graphique, sur l'intervalle $[0\ ;\ 0,95]$, la fonction f et la somme partielle d'indice 20 de la série entière $\sum c_n x^n$.

---

33. La suite de Fibonacci (a_n) est définie par

$$a_0 = 0 \quad ; \quad a_1 = 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ .$$

a. Écrire une fonction retournant a_n, prenant n comme argument.

b. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout x tel que cette série entière converge. Représenter la somme partielle d'indice 20 de cette série entière dans l'intervalle $[0\ ;\ 0,6]$.

c. Montrer que, pour tout $x \in]-R,R[$, où R est le rayon de convergence, on a $f(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$.

d. Représenter sur le même graphique la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1-x-x^2}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 0,6]$.