UN PROBLÈME sur les SÉRIES ENTIÈRES (CORRIGÉ)

PARTIE A

A.1. La formule de Taylor avec reste intégral donne

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n\, h^{(n+1)}(t)}{n!}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(x-xu)^n\, h^{(n+1)}(xu)}{n!}x\mathrm{d}u = x^{n+1}\int_0^1 \frac{(1-u)^n\, h^{(n+1)}(xu)}{n!}\mathrm{d}u$$

(on a effectué le changement de variable linéaire $t = xu$).

A.2. On a $h^{(n+2)} \geq 0$ sur l'intervalle $[0, a[$, donc la fonction $h^{(n+1)}$ est croissante sur cet intervalle et, pour tout $u \in [0,1]$, on a alors $h^{(n+1)}(xu) \leq h^{(n+1)}(yu)$. On en déduit

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} y^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n\, h^{(n+1)}(xu)}{n!}\,\mathrm{d}u \\ &\leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} y^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n\, h^{(n+1)}(yu)}{n!}\,\mathrm{d}u = \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y)\ . \end{aligned}$$

Par ailleurs, de $h^{(n+1)} \geq 0$ sur $[0, x]$, on déduit que $R_n(x) \geq 0$. Enfin, $R_n(y) \leq h(y)$ puisque $h(y) - R_n(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(0)}{k!}\, y^k$, somme dont tous les termes sont positifs.

A.3. Fixons $x \in]0, a[$; choisissons un y tel que $x < y < a$. La suite de terme général $\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} h(y)$ est une suite géométrique de raison $\frac{x}{y} \in]0,1[$, donc elle converge vers 0. Le théorème d'encadrement permet alors d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$, ce qui montre que f est somme de sa série de Taylor en tout point de l'intervalle $]0, a[$ (pour $x = 0$, c'est évident).

PARTIE B

B.1.a. Démonstration par récurrence sur n de l'existence du polynôme P_n :

- pour $n = 0$, c'est vrai avec $P_0(X) = X$ (de degré 1) ;

- si c'est vrai au rang n, alors $g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)}\right)'(x) = (1+\tan^2 x)P_n'(\tan x) = P_{n+1}(\tan x)$, avec $P_{n+1}(X) = (1+X^2)\, P_n'(X)$, donc $\deg(P_{n+1}) = 1 + \deg(P_n)$.

Ainsi, l'existence du polynôme P_n pour tout n est démontrée, avec $\deg(P_n) = n+1$. L'unicité est immédiate : si un autre polynôme Q_n était solution du problème, on aurait $P_n(\tan x) = Q_n(\tan x)$ pour tout $x \in I$, donc $P_n(t) = Q_n(t)$ pour tout réel t, d'où égalité des polynômes P_n et Q_n puisque les fonctions polynomiales associées coïncident.

b. On montre par récurrence sur n que les coefficients du polynôme P_n appartiennent à $\mathbb{N}$: c'est vrai pour $n = 0$ ($P_0 = X$) et l'hérédité résulte immédiatement de la relation de récurrence $P_{n+1} = (1+X^2)\, P_n'$.

B.2.a. Les coefficients du polynôme P_n étant positifs, et la fonction tangente prenant des valeurs positives sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad g^{(n)}(x) = P_n(\tan x) \geq 0\ ,$$

c'est-à-dire les hypothèses de la **PARTIE A**, donc la fonction $g = \tan$ est somme de sa série de Taylor sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et sa série de Taylor est bien celle proposée par l'énoncé (car, g étant impaire, on a $g^{(2n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Les fonctions S et g sont impaires et coïncident sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc sont égales sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b. De la question **a.**, on déduit que le rayon de convergence de la série entière S est au moins égal à $\frac{\pi}{2}$; par ailleurs, la fonction somme S, définie et coïncidant avec g sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, a pour limite à gauche $+\infty$ en $\dfrac{\pi}{2}$, ce qui prouve que l'on ne peut pas la prolonger en une fonction continue sur un intervalle $]-R,R[$ avec $R>\dfrac{\pi}{2}$, donc le rayon de convergence de la série de Taylor S de la fonction tangente est exactement $\dfrac{\pi}{2}$.

PARTIE C

C.1. $\mathcal{S}$ contient la suite nulle et, si $s=(s_n)$ et $s'=(s'_n)$ sont deux suites appartenant à $\mathcal{S}$, si α et β sont deux réels, prenons des réels strictement positifs M, M', K, K' tels que $|s_n|\leq M\,K^n$ et $|s'_n|\leq M'\,K'^n$, on vérifie que $|\alpha s_n+\beta s'_n|\leq M''\,K''^n$, avec $M''=|\alpha|M+|\beta|M'$ et $K''=\max\{K,K'\}$. Donc $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

C.2.a. Supposons $a\in\mathcal{S}$ et $b\in\mathcal{S}$, avec $|a_n|\leq M\,K^n$ et $|b_n|\leq M'\,K'^n$. Posons $c=a\otimes b$, c'est-à-dire $c_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$. On a alors, en posant $C=\max\{K,K'\}$ et en utilisant l'inégalité $n+1\leq 2^n$:

$$|c_n|\leq\sum_{k=0}^{n}|a_k|\,|b_{n-k}|\leq M\,M'\sum_{k=0}^{n}K^k\,K'^{n-k}\leq M\,M'\sum_{k=0}^{n}C^n=(n+1)\,M\,M'\,C^n\leq M\,M'\,(2C)^n\ ,$$

donc la suite $c=a\otimes b$ appartient à $\mathcal{S}$. L'ensemble $\mathcal{S}$ est donc stable pour la loi $\otimes$.

b. On cherche une suite (e_n) telle que, pour toute suite (a_n) appartenant à $\mathcal{S}$, on ait $a\otimes e=a$ (la loi $\otimes$ est clairement commutative), soit $a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_ke_{n-k}$, et on voit qu'il suffit de poser $e_0=1$ et $e_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, autrement dit $e_n=\delta_{0,n}$ (c'est bien une suite appartenant à $\mathcal{S}$).

On peut montrer que cette loi $\otimes$, qui correspond au produit de Cauchy des séries et qui porte aussi le nom de **convolution**, *est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition, et que $(\lambda a)\otimes b=a\otimes(\lambda b)=\lambda\,(a\otimes b)$.*

C.3.a. La recherche d'une suite $b\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a\otimes b=e$ conduit au système

$$b_0=1\ ;\quad b_1+a_1b_0=0\ ;\quad b_2+a_1b_1+a_2b_0=0\ ;\quad\cdots$$

Ce "système triangulaire infini" admet une solution unique, puisqu'il permet de calculer les coefficients b_n de proche en proche, à savoir $b_0=1$ puis, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, les coefficients b_k $(0\leq k\leq n-1)$ étant supposés déterminés, $b_n=-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}a_{n-k}b_k$.

b. Par récurrence forte sur n : c'est vrai pour $n=0$ ($|b_0|=1\leq(1+M)^0K^0=1$) et, si la majoration $|b_k|\leq(1+M)^kK^k$ est vraie pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, alors

$$|b_n|\leq\sum_{k=0}^{n-1}|a_{n-k}|\,|b_k|\leq\sum_{k=0}^{n-1}M\,K^{n-k}\,(1+M)^k\,K^k=M\,K^n\sum_{k=0}^{n-1}(1+M)^k=M\,K^n\,\frac{(1+M)^n-1}{M}\ ,$$

ce que l'on peut majorer par $K^n(1+M)^n$, ce qui achève la preuve par récurrence.

On a ainsi prouvé que $b\in\mathcal{S}$.

C.4.a. Si $s \in \mathcal{S}$, on a une majoration de la forme $|s_n| \leq M\, K^n$, donc la série entière $\sum s_n x^n$ a un rayon de convergence non nul (au moins égal à $\dfrac{1}{K}$ par comparaison).

b. Inversement, si la série entière $\sum s_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$, alors en prenant r tel que $0 < r < R$, la série numérique $\sum |s_n| r^n$ converge, donc son terme général est borné : il existe $M > 0$ tel que $|s_n| r^n \leq M$ pour tout n, soit $|s_n| \leq M \left(\dfrac{1}{r}\right)^n$ et $s \in \mathcal{S}$.

C.5.a. Sur $]-R, R[$, on a $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$; la rayon de convergence de cette série entière étant non nul, la suite de ses coefficients $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{S}$ (question **C.4.b.** ci-dessus) ; comme $a_0 = 1$, de la question **C.3.**, on déduit l'existence d'une suite $b = (b_n)$, appartenant aussi à $\mathcal{S}$, telle que $a \otimes b = e$. De la question **C.4.a.**, on déduit enfin que la série entière $\sum b_n x^n$ a un rayon de convergence R' non nul, notons $g(x)$ sa somme sur l'intervalle $]-R', R'[$. En posant $R'' = \min\{R, R'\}$, le produit de Cauchy des deux séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à R'' et sa somme vaut $h(x)g(x)$ sur $]-R'', R''[$; mais ce produit de Cauchy n'est autre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e_n x^n = 1$. Sur l'intervalle $]-R'', R''[$, on a donc $h(x)\, g(x) = 1$, soit $g(x) = \dfrac{1}{h(x)}$: la fonction $g = \dfrac{1}{h}$ est donc développable en série entière dans l'intervalle $]-R'', R''[$.

b. On peut appliquer le résultat du **a.** à la fonction cosinus : elle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec $a_0 = \cos 0 = 1$. Donc la fonction $\dfrac{1}{\cos}$ est développable en série entière dans un certain intervalle $]-R, R[$ avec $R > 0$. La fonction sinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donc la fonction produit $\dfrac{1}{\cos} \times \sin = \tan$ est développable en série entière au moins sur l'intervalle $]-R, R[$ (puisque, sur cet intervalle, son développement s'obtient en faisant le produit de Cauchy des deux développements précédents).