DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 4

PSI2 2024-2025 **le 07/12/2024**

PROBLÈME 1

Étude de matrices tridiagonales

Les trois parties sont indépendantes

PARTIE A.

Dans cette partie, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ n-1 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-2 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

C'est la matrice carrée d'ordre n de coefficients $a_{i,j}$ tous nuls exceptés:

$$a_{k+1,k} = n-k \quad \text{et} \quad a_{k,k+1} = k \qquad (1 \leq k \leq n-1) .$$

A.1. Exemples de $n = 2$ et $n = 3$.

- **a.** La matrice A_2 est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?
- **b.** Mêmes questions pour la matrice A_3.

A.2. Exemple de $n = 4$.

Dans cette question, on considère la matrice $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, notée simplement A, et on donne le polynôme $Q = (X^2-1)(X^2-9)$.

- **a.** Calculer les matrices A^2 et $Q(A)$.
- **b.** Justifier que A est diagonalisable.
- **c.** Déterminer une matrice $\Delta \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients entiers, inversible, telle que $D = \Delta^{-1} A\, \Delta$ soit une matrice diagonale, $D = \mathrm{diag}(a, b, c, d)$ avec $a > b > c > d$.
- **d.** Montrer que $\Phi : M \mapsto \Delta\, M\, \Delta^{-1}$ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
- **e.** Montrer qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ commute avec D si et seulement si N est diagonale.
- **f.** Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_A = \big\{M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \mid AM = MA\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, et préciser sa dimension.
- **g.** Montrer que (I_4, A, A^2, A^3) est une base de $\mathcal{C}_A$.

A.3. Cas général.

On note ici $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus $n-1$, on le munit de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \cdots, X^{n-1})$.

- **a.** Justifier que l'application $\varphi : P \mapsto (1-X^2)P' + (n-1)XP$ définit un endomorphisme de l'espace vectoriel E, et calculer $\varphi(X^k)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.
- **b.** Vérifier que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = A_n$.
- **c.** Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on définit le polynôme $P_k = (X-1)^k (X+1)^{n-1-k}$. Montrer que P_k est vecteur propre de φ associé à une valeur propre λ_k que l'on déterminera.
- **d.** En déduire que la matrice A_n est diagonalisable.
- **e.** La matrice A_n est-elle inversible ? *On discutera selon l'entier n.*

PARTIE B.

Dans cette partie, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on posera $B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

C'est la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient d'indices (i, j) vaut 1 si $|i-j| = 1$, et 0 sinon.

Pour tout n entier naturel, $n \geq 2$, on note χ_n le polynôme caractéristique de la matrice B_n et, pour x réel, on pose

$$D_n(x) = \chi_n(2\,\cos x) = \begin{vmatrix} 2\cos x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2\cos x & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2\cos x & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\cos x \end{vmatrix}_{(n)}.$$

B.1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, déterminer une relation entre $D_n(x)$, $D_{n-1}(x)$ et $D_{n-2}(x)$.

B;2. En déduire que, pour $n \geq 2$ et $x \in]0, \pi[$, on a $D_n(x) = \dfrac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin(x)}$.

B.3. En déduire les valeurs de $D_n(0)$ et de $D_n(\pi)$ pour $n \geq 2$.

B.4. En déduire que la matrice B_n admet n valeurs propres distinctes, que l'on explicitera.

B.5. Montrer que la matrice B_n est diagonalisable. En déduire des expressions simplifiées du produit et de la somme ci-dessous:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \quad ; \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

Pour le produit P_n, on pourra discuter suivant la parité de l'entier n.

PARTIE C.

Dans cette partie, on considère un entier naturel n, $n \geq 2$, deux réels strictement positifs a et b, et la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante: $M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & b & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$.

On note $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de la matrice M. Pour tout réel λ, on pose $C_\lambda = M - \lambda I_n$. Le but de cette partie est de localiser les valeurs propres réelles de M, c'est-à-dire de trouver un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Sp}(M) \subset I$.

C.1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ un indice tel que $|x_k| = \max\big\{|x_1|, \cdots, |x_n|\big\}$.

a. En examinant la k-ième ligne du système linéaire $C_\lambda X = 0$, montrer que $|\lambda| \leq a + b$.

b. En déduire un premier intervalle I tel que $\mathrm{Sp}(M) \subset I$.

C.2. Ici, λ est un réel quelconque. On dira qu'une suite réelle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie **(R)** si on a

$$\textbf{(R) :} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad b\,u_k - \lambda\,u_{k+1} + a\,u_{k+2} = 0\ .$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $x_0 = x_{n+1} = 0$.

Montrer que X vérifie $C_\lambda X = 0$ si et seulement si x_0, x_1, $\cdots$, x_n, x_{n+1} sont les $n+2$ premiers termes d'une suite (x_k) vérifiant **(R)**.

C.3. On suppose dans cette question que $\lambda^2 > 4ab$.

a. Déterminer l'ensemble des suites vérifiant **(R)**.

b. Montrer que $\mathrm{Ker}(C_\lambda) = \{0\}$.

C.4. On suppose dans cette question que $\lambda^2 = 4ab$.

a. Déterminer l'ensemble des suites vérifiant **(R)**.

b. Montrer encore que $\mathrm{Ker}(C_\lambda) = \{0\}$.

C.5. Des questions **C.3.** et **C.4.** ci-dessus, déduire un intervalle J de $\mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Sp}(M) \subset J$. Le résultat obtenu est-il meilleur que celui de la question **C.1.** ?

PROBLÈME 2

PARTIE A.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n. On considère l'application $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \qquad \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)\ .$$

On définit une suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes par

$$N_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad N_k = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i) = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}\ .$$

1.a. Montrer que, pour tout n entier naturel, la famille $(N_0, \cdots, N_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Calculer $\Delta(N_k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

2.a. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et que, pour tout n entier naturel, le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ.

On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ.

b. Préciser l'image et le noyau de Δ_n.

c. Quelle est la matrice de l'endomorphisme Δ_n relativement à la base $(N_0, \cdots, N_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$?

d. Étudier si Δ_n est diagonalisable.

3. Préciser l'image et le noyau de l'endomorphisme Δ de $\mathbb{R}[X]$.

PARTIE B.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \displaystyle\int_0^1 N_k(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Calculer I_0, I_1 et I_2.

b. Quel est le signe de I_k pour $k \in \mathbb{N}^*$?

c. Soit $k \in \mathbb{N}$, avec $k \geq 2$. Prouver l'encadrement

$$\forall t \in [0,1] \qquad \frac{t(1-t)}{k(k-1)} \leq \left|N_k(t)\right| \leq \frac{t(1-t)}{k} \ .$$

d. En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{k\geq 0} I_k x^k$.

Pour $x \in\,]-R, R[$, on posera $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} I_k x^k$.

e. Prouver que, pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, on a

$$\varphi(x) = \int_0^1 (1+x)^t\,\mathrm{d}t = \frac{x}{\ln(1+x)} \ .$$

f. Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{k\geq 0} I_k x^k$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$.

On pourra utiliser le théorème spécial des séries alternées.

g. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} I_k$.

5. Justifier l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{I_k}{k+1}$.

6. Pour $x \in]-1,1[$, on pose $\psi(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)}$ si $x \neq 0$, et $\psi(0) = -1$.

Montrer que la fonction ψ est développable en série entière sur $]-1,1[$, le rayon de convergence de son développement valant 1. *On pourra utiliser φ.*