CORRIGÉ du DS de MATHÉMATIQUES numéro 4

PSI2 2024-2025 **le 07/12/2024**

PROBLÈME 1

d'après e3a, filière PC, 2015, épreuve 1 et Centrale, filière TSI, 2015, épreuve 1

PARTIE A.

A.1. Exemples de $n = 2$ et $n = 3$.

a. On a $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\chi_{A_2}(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ et $\mathrm{Sp}(A_2) = \{-1, 1\}$. Comme A_2 admet deux valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable. Comme elle n'admet pas 0 pour valeur propre, elle est inversible.

b. On a $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\chi_{A_3}(x) = x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$ et $\mathrm{Sp}(A_3) = \{-2, 0, 2\}$. Comme A_3 admet trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable. Comme elle admet 0 pour valeur propre, elle n'est pas inversible.

A.2. Exemple de $n = 4$.

a. On calcule $A^2 = A_4^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, puis $Q(A) = (A^2 - I_4)(A^2 - 9I_4) = 0_4$.

b. Le polynôme $Q = (X-1)(X+1)(X-2)(X+2)$ est scindé à racines simples, et il est annulateur de A, donc A est diagonalisable.

c. De $Q(A) = 0$, on déduit que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathcal{Z}(Q) = \{3, 1, -1, -3\}$, puis on vérifie que chacun de ces quatre nombres est effectivement valeur propre de A et on recherche le sous-espace propre associé. Les calculs sont laissés au lecteur intrépide, on obtient

$$E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right), E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right), E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

On a donc $A = \Delta D \Delta^{-1}$ ou $D = \Delta^{-1} A \Delta$, avec $D = \mathrm{diag}(3, 1, -1, -3)$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

d. L'application Φ va bien de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vers lui-même, sa linéarité est une pure formalité et

$$M \in \mathrm{Ker}(\Phi) \iff \Delta M \Delta^{-1} = 0_4 \iff M = 0_4\ ,$$

donc Φ est injective, donc bijective (dimension finie), c'est un automorphisme. Notons que Φ^{-1} est définie par $N \mapsto \Delta^{-1} N \Delta$.

e. Si $N = (n_{i,j})$ est une matrice carrée d'ordre 4, et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$, un calcul classique, lié aux opérations élémentaires sur les lignes et colonnes, montre que le coefficient d'indices (i,j) de la matrice DN est $\lambda_i\, n_{i,j}$, alors que celui de la matrice ND est $\lambda_j\, n_{i,j}$. Si $DN = ND$, alors $\lambda_i n_{i,j} = \lambda_j n_{i,j}$ pour tout couple (i,j), et si les λ_i sont deux à deux distincts (c'est le cas ici), cela entraîne $n_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$, donc la matrice N est diagonale. Réciproquement, toute matrice N diagonale commute avec D qui est aussi diagonale.

f. On vérifie facilement que $\mathcal{C}_A$ est non vide (contient la matrice nulle) et est stable par combinaisons linéaires. En notant de même $\mathcal{C}_D = \big\{N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \mid ND = DN\big\}$, on vient de montrer que $\mathcal{C}_D$ est l'ensemble des matrices diagonales, soit $\mathcal{C}_D = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{4,4})$, donc $\dim(\mathcal{C}_D) = 4$. Mais

$$\begin{aligned} M\in\mathcal{C}_A \quad &\iff \quad MA=AM \iff M\Delta D\Delta^{-1}=\Delta D\Delta^{-1}M \\ &\iff \quad (\Delta^{-1}M\Delta)\,D=D\,(\Delta^{-1}M\Delta) \iff \Phi^{-1}(M)\in\mathcal{C}_D\ . \end{aligned}$$

On a donc $\mathcal{C}_A=\Phi(\mathcal{C}_D)$ et, puisqu'une application linéaire injective conserve les dimensions, $\dim(\mathcal{C}_A)=\dim(\mathcal{C}_D)=4$.

g. Les quatre matrices I_4, A, A^2, A^3 appartiennent clairement à $\mathcal{C}_A$. Comme $\dim(\mathcal{C}_A)=4$, pour montrer qu'elles constituent une base de $\mathcal{C}_A$, il suffit de montrer que la famille (I_4,A,A^2,A^3) est libre. Supposons alors $aI_4+bA+cA^2+dA^3=0$ avec a, b, c, d réels. Le polynôme $P=a+bX+cX^2+dX^3$ est alors annulateur de la matrice A, ce qui entraîne qu'il admet pour racines toutes les valeurs propres de A, il est alors de degré au plus trois et a quatre racines distinctes, donc $P=0$, soit $a=b=c=d=0$.

A.3. Cas général.

a. La linéarité de φ est une pure formalité résultant de la linéarité de la dérivation. On calcule $\varphi(X^0)=\varphi(1)=(n-1)X$ et, pour $k\in[\![1,n]\!]$,

$$\varphi(X^k)=kX^{k-1}+(n-1-k)\,X^{k+1}\ .$$

En particulier, $\varphi(X^n)=nX^{n-1}$. On observe donc que $\forall k\in[\![0,n-1]\!]\quad \varphi(X^k)\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par linéarité de φ, on déduit que $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est stable par φ, donc φ est bien un endomorphisme de cet espace vectoriel.

b. On a bien $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)=A_n$, que dire d'autre ?

c. On calcule $\varphi(P_k)=(n-1-2k)\,(X-1)^k(X+1)^{n-1-k}=(n-1-2k)\,P_k$. *Les détails de calcul ont été omis afin de ne pas heurter les plus sensibles de nos lecteurs.* On a donc $\lambda_k=n-1-2k$.

d. L'endomorphisme φ (et donc la matrice A_n) admet n valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.

e. Les valeurs propres de A_n sont des entiers relatifs ayant la même parité que $n-1$. On peut donc déjà affirmer que, si n est pair, alors 0 n'est pas valeur propre de A_n, donc A_n est inversible. En revanche, si n est impair, $n=2p+1$, alors $\lambda_p=0$, donc $0\in\mathrm{Sp}(A_n)$ et A_n n'est pas inversible.

PARTIE B.

B.1. Par un développement par rapport à la première ligne, puis par rapport à la première colonne, on obtient, pour $n\geq 4$,

$$D_n(x)=2\cos(x)\,D_{n-1}(x)-D_{n-2}(x)\ .$$

B.2. On reconnaît une récurrence linéaire d'ordre deux à coefficients constants (i.e. indépendants de n), l'équation caractéristique est $r^2-(2\,\cos x)\,r+1=0$, dont les racines (complexes) sont $r_1=e^{ix}$ et $r_2=e^{-ix}$, qui sont distinctes puisque $0<x<\pi$. On sait qu'il existe alors λ et μ (dépendant de x), ou encore α et β (dépendant de x aussi) tels que

$$D_n(x)=\lambda(x)\,r_1^n+\mu(x)\,r_2^n=\lambda(x)\,e^{inx}+\mu(x)\,e^{-inx}=\alpha(x)\,\cos(nx)+\beta(x)\,\sin(nx)\ .$$

À l'aide de $D_2(x)$ et $D_3(x)$, on détermine $\alpha(x)=1$ et $\beta(x)=\operatorname{cotan}(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$. Ainsi,

$$D_n(x)=\cos(nx)+\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\ \sin(nx)=\frac{\sin(x)\ \cos(nx)+\cos(x)\ \sin(nx)}{\sin(x)}=\frac{\sin(n+1)x}{\sin(x)}\ .$$

NB: Le calcul à partir de $D_2(x)$ et $D_3(x)$ est assez lourd, on peut commencer par justifier qu'il est cohérent de poser $D_0(x)=1$ et $D_1(x)=2\cos(x)$, et utiliser cette initialisation pour le calcul de $\alpha(x)$ et $\beta(x)$, cela va beaucoup plus vite!

B.3. L'application D_n correspond à un déterminant dont tous les coefficients sont des fonctions continues de la variable x. Ainsi, cette application D_n est continue sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(n+1)x}{\sin(x)}=n+1$, on déduit $D_n(0)=n+1$. En posant $x=\pi-h$, on a, lorsque $h\to 0^+$, $D_n(\pi-h)=\dfrac{\sin\big((n+1)(\pi-h)\big)}{\sin(\pi-h)}=\dfrac{(-1)^n\ \sin\big((n+1)h\big)}{\sin(h)}\underset{h\to 0^+}{\longrightarrow}(-1)^n(n+1)$, donc $D_n(\pi)=(-1)^n(n+1)$.

B.4. L'expression $\chi_n(2\cos x)$ est donc nulle pour tous les $x\in]0,\pi[$ tels que $\sin(n+1)x=0$, c'est-à-dire pour les x de la forme $\dfrac{k\pi}{n+1}$, avec $1\leq k\leq n$ vu l'intervalle dans lequel doit se trouver x. La fonction cosinus étant injective (car strictement décroissante) sur l'intervalle $]0,\pi[$, les nombres $\lambda_k=2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$ sont n réels distincts qui sont racines du polynôme caractéristique χ_n, et qui sont donc valeurs propres de la matrice B_n. Cette matrice, de taille n, ne peut avoir plus de n valeurs propres, on a donc obtenu toutes ses valeurs propres, qui sont les λ_k, $1\leq k\leq n$.

B.5. La matrice B_n, de taille n, admet n valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

• On a $\det(B_n)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\lambda_k=2^n\ P_n$, mais aussi $\det(B_n)=(-1)^n\ \chi_n(0)=(-1)^n\ D_n\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big)$, donc $P_n=\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^n\sin\Big((n+1)\dfrac{\pi}{2}\Big)$. Lorsque n est impair, cette expression est nulle: $P_{2m+1}=0$. Lorsque n est pair ($n=2m$), alors $\sin\Big((n+1)\dfrac{\pi}{2}\Big)=\sin\Big((2m+1)\dfrac{\pi}{2}\Big)=(-1)^m$, donc $P_{2m}=\Big(-\dfrac{1}{4}\Big)^m$.

• La matrice B_n^2 est diagonalisable, avec pour valeurs propres les λ_k^2, $1\leq k\leq n$, donc $\operatorname{tr}(B_n^2)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2$. Un petit calcul montre que les coefficients diagonaux de la matrice B_n^2 sont $(1,2,2,\cdots,2,2,1)$, les autres coefficients ne nous intéressent pas, donc

$$4\,S_n=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2=\operatorname{tr}(B_n^2)=2(n-1)\quad\text{et}\quad S_n=\frac{n-1}{2}\ .$$

PARTIE C.

C.1.a. Le système linéaire $C_\lambda X=0$ s'écrit $\begin{cases} -\lambda x_1+ax_2=0\\ \forall i\in[\![2,n-1]\!]\quad bx_{i-1}-\lambda x_i+ax_{i+1}=0\\ bx_{n-1}-\lambda x_n=0\end{cases}$.

• Si $2 \leq k \leq n-1$, alors la k-ème équation $bx_{k-1} - \lambda x_k + ax_{k+1} = 0$ entraîne

$$|\lambda|\,|x_k| = |\lambda\, x_k| = |ax_{k+1} + bx_{k-1}| \leq a|x_{k+1}| + b|x_{k-1}| \leq (a+b)|x_k| \,,$$

d'où $|\lambda| \leq a+b$ puisque $|x_k| > 0$.

• Si $k=1$, la 1ère équation $\lambda x_1 = ax_2$ entraîne $|\lambda|\,|x_1| = a|x_2| \leq a|x_1|$, d'où $|\lambda| \leq a \leq a+b$.

• Si $k=n$, la dernière équation $\lambda x_n = bx_{n-1}$ entraîne $|\lambda|\,|x_n| \leq b|x_{n-1}| \leq b|x_n|$, d'où $|\lambda| \leq b \leq a+b$.

b. On a donc $\mathrm{Sp}(M) \subset I$, avec $I = \big[-(a+b), a+b\big]$.

C.2. Si $C_\lambda X = 0$, alors la suite finie $(x_0 = 0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1} = 0)$ vérifie la relation **(R)** jusqu'au rang $n-1$; en posant ensuite $x_k = \dfrac{1}{a}(\lambda x_{k-1} - bx_{k-2})$ à partir du rang $n+2$, on construit une suite (x_k) vérifiant **(R)**. Inversement, si une suite (x_k) vérifie **(R)** et si, de plus, $x_0 = x_{n+1} = 0$, alors le vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est solution de $C_\lambda X = 0$.

C.3. Si $\lambda^2 > 4ab$, l'équation caractéristique de **(R)**, soit **(C)**: $ar^2 - \lambda r + b = 0$, admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, non nulles et de même signe puisque $r_1 r_2 = \dfrac{b}{a} > 0$, la suite (x_k) admet une expression de la forme $x_k = Ar_1^k + Br_2^k$, où A et B sont deux constantes. Les conditions $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$ se traduisent par $\begin{cases} A + B & = 0 \\ Ar_1^{n+1} + Br_2^{n+1} & = 0 \end{cases}$, qui entraîne $A = B = 0$ puisque le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1^{n+1} & r_2^{n+1} \end{vmatrix} = r_2^{n+1} - r_1^{n+1}$ de ce système est non nul. Ainsi, la suite (x_k) est nulle, X est le vecteur nul, et $\mathrm{Ker}(C_\lambda) = \{0\}$, autrement dit λ n'est pas valeur propre de la matrice M.

C.4. Si $\lambda^2 = 4ab$, l'équation caractéristique de **(R)** admet une racine réelle double $r_0 = \dfrac{\lambda}{2a}$, non nulle car $\lambda^2 = 4ab \neq 0$, et la suite (x_k) admet une expression de la forme $x_k = (Ak+B)r_0^k$. Ici aussi, les conditions $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$ entraînent $A = B = 0$, puis $X = 0$, soit $\mathrm{Ker}(C_\lambda) = \{0\}$, et $\lambda \notin \mathrm{Sp}(M)$.

C.5. Des questions **C.3** et **C.4.**, on déduit que, si un réel λ est valeur propre de M, alors $\lambda^2 < 4ab$. Donc $\mathrm{Sp}(M) \subset J$, avec $J = \big]-2\sqrt{ab}, 2\sqrt{ab}\big[$. Ce résultat est meilleur que celui de la question **C.1.** puisque, de l'identité remarquable $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$, on déduit que $J \subset I$.

PROBLÈME 2

PARTIE A.

1.a. Les polynômes sont de degrés tous distincts, donc la famille est libre. Elle est de cardinal $n+1 = \dim\big(\mathbb{R}_n[X]\big)$, c'est donc une base de cet espace vectoriel.

b. On a $\Delta(N_0) = 0$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, après réduction des calculs sur feu moyen,

$$\Delta(N_k)(X) = N_k(X+1) - N_k(X) = k\,\frac{X(X-1)\cdots(X-k+2)}{k!} = N_{k-1}(X)\ ,$$

donc $\Delta(N_k) = N_{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

2.a. La linéarité de Δ est immédiate, on a bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Comme $\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}(N_0, \cdots, N_n)$, on déduit que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Delta\big(\mathbb{R}_n[X]\big) = \mathrm{Vect}\,\big(\Delta(N_0), \cdots, \Delta(N_n)\big) = \mathrm{Vect}(N_0, \cdots, N_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]\ ,$$

donc le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ.

b. Pour l'image, on a déjà répondu, puisque $\mathrm{Im}(\Delta_n) = \Delta\big(\mathbb{R}_n[X]\big) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ si $n \geq 1$, et $\mathrm{Im}(\Delta_0) = \{0\}$. On a donc $\mathrm{rg}(\Delta_n) = n$, d'où $\dim\big(\mathrm{Ker}(\Delta_n)\big) = (n+1) - n = 1$. Or, il est immédiat que $\mathbb{R}_0[X] \subset \mathrm{Ker}(\Delta_n)$. Par inclusion et égalité des dimensions, on conclut que $\mathrm{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{R}_0[X] \simeq \mathbb{R}$.

c. Avec $\mathcal{N}_n = (N_0, \cdots, N_n)$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{N}_n}(\Delta_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

d. La matrice ci-dessus est triangulaire supérieure, on observe donc immédiatement $\mathrm{Sp}(\Delta_n) = \{0\}$. Or, le sous-espace propre $E_0(\Delta_n) = \mathrm{Ker}(\Delta_n)$ est de dimension $1 < n+1$, donc l'endomorphisme Δ_n n'est pas diagonalisable (sauf pour $n = 0$!).

3. Clairement,

$$\mathrm{Im}(\Delta) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(\Delta_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathbb{R}[X] \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(\Delta) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{R}_0[X]\ .$$

PARTIE B.

4.a. $I_0 = 1$, $I_1 = \dfrac{1}{2}$, $I_2 = -\dfrac{1}{12}$.

b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$, $N_k(t) = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}(t-i)$. Le facteur t est positif, les facteurs $t - i$ avec $i \in [\![1, k-1]\!]$ sont négatifs, donc $N_k(t)$ est du signe de $(-1)^{k-1}$ pour tout t dans $[0,1]$, puis $I_k = \displaystyle\int_{[0,1]} N_k$ est aussi du signe de $(-1)^{k-1}$.

c. Pour $k \geq 2$ et $t \in [0,1]$, on a

$$\big|N_k(t)\big| = \frac{1}{k!}t(1-t)\ (2-t)\cdots(k-1-t) \leq \frac{1}{k!}\ t(1-t) \times 2 \times \cdots \times (k-1) = \frac{t(1-t)}{k}$$

et

$$\big|N_k(t)\big| = \frac{1}{k!}t(1-t)\ (2-t)\cdots(k-1-t) \geq \frac{1}{k!}\ t(1-t) \times 1 \times 2 \times \cdots \times (k-2) = \frac{t(1-t)}{k(k-1)}\ .$$

d. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction polynomiale N_k est de signe constant sur $[0,1]$ (elle n'admet aucune racine dans $]0,1[$), donc

$$|I_k| = \left| \int_0^1 N_k(t)\,\mathrm{d}t \right| = \int_0^1 \big|N_k(t)\big|\,\mathrm{d}t\ .$$

De la question **c.** ci-dessus, on déduit alors l'encadrement, pour $k \geq 2$,

$$\frac{1}{6k(k-1)} = \int_0^1 \frac{t(1-t)}{k(k-1)}\,\mathrm{d}t \leq |I_k| = \int_0^1 \big|N_k(t)\big|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{t(1-t)}{k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6k}\ .$$

Les séries entières $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{x^k}{6k(k-1)}$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{6k}$ ont toutes deux pour rayon de convergence 1 (par d'Alembert par exemple). Par comparaison des coefficients, la série entière $\displaystyle\sum_{k\geq 0} I_k x^k$ a aussi pour rayon de convergence 1.

e. On a $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\int_0^1 x^k\, N_k(t)\,\mathrm{d}t \Big)$. Pour $x \in\,]-1,1[$ fixé, la série de fonctions $\displaystyle\sum_k u_k$, avec $u_k(t) = x^k N_k(t)$, converge normalement sur $[0,1]$ car $|u_k(t)| \leq \dfrac{|x|^k}{4k}$ (pour $k \geq 2$, en utilisant **c.** et le fait que $\displaystyle\max_{t\in[0,1]} t(1-t) = \frac{1}{4}$) et la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{|x|^k}{4k}$ est convergente. On peut donc intervertir somme et intégrale : si $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} t(t-1)\cdots(t-k+1)\,\frac{x^k}{k!}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^1 (1+x)^t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 e^{t\,\ln(1+x)}\,\mathrm{d}t \;=\; \left[\frac{e^{t\,\ln(1+x)}}{\ln(1+x)}\right]_{t=0}^{t=1} \;=\; \frac{x}{\ln(1+x)}
\end{aligned}$$

et, pour $x = 0$, on obtient $\varphi(0) = I_0 = 1$.

f. On a déjà observé que, pour $t \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $N_k(t)$ est du signe de $(-1)^{k-1}$, donc $I_k = \displaystyle\int_0^1 N_k(t)\,\mathrm{d}t$ est aussi du signe de $(-1)^{k-1}$. Pour $x \in [0,1]$ fixé, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} I_k x^k$ est donc une série alternée dont le terme général tend vers zéro puisque $|I_k x^k| \leq |I_k| \leq \dfrac{1}{6k}$.
Il reste à démontrer que la suite $(|I_k|x^k)_k$ est décroissante. On sait déjà que la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est positive décroissante, il suffit donc de montrer qu'il en est de même de la suite $(|I_k|)_k$.
Or, sur $[0,1]$, on a

$$|N_{k+1}(t)| = \frac{t(1-t)\cdots(k-1-t)(k-t)}{(k+1)!} = \frac{k-t}{k+1}\,\frac{t(1-t)\cdots(k-1-t)}{k!} = \frac{k-t}{k+1}|N_k(t)| \leq |N_k(t)|$$

puisque $\dfrac{k-t}{k+1} \leq 1$ donc, par croissance de l'intégrale,

$$0 \leq |I_{k+1}| = \left|\int_0^1 N_{k+1}(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 |N_{k+1}(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 |N_k(t)|\,\mathrm{d}t = \left|\int_0^1 N_k(t)\,\mathrm{d}t\right| = |I_k|\ .$$

Les hypothèses du critère spécial des séries alternées étant satisfaites, on déduit la convergence de la série pour tout $x \in [0,1]$ et la majoration (en valeur absolue) du reste :

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} I_k x^k\right| \leq |I_{n+1}|\, x^{n+1} \leq |I_{n+1}| \leq \frac{1}{6(n+1)}\ .$$

Comme $\dfrac{1}{6(n+1)}$ tend vers zéro **indépendamment de** x, on a prouvé la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{k\geq 0} I_k x^k$ sur le segment $[0,1]$.

g. La fonction somme φ est donc continue sur $[0,1]$ et, en particulier,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} I_k = \varphi(1) = \lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln(1+x)} = \frac{1}{\ln 2}\ .$$

5. Comme la série $\sum_k I_k x^k$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$, on peut intégrer terme à terme, ce qui donne l'égalité voulue.

6. On écrit $\psi(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x}\,\varphi(x)$ pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$. Or, la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1-x)}{x}$ (prolongée par la valeur 1 en 0) est développable en série entière sur $]-1,1[$ car égale à $-\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k+1}$. Comme φ est aussi DSE sur $]-1,1[$, un produit de Cauchy permet d'obtenir un développement en série entière de ψ sur $]-1,1[$. Comme $\lim_{x\to 1^-} \psi(x) = -\infty$, le rayon de convergence de la série entière ne peut dépasser 1, et vaut donc 1.