DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 5

PSI2 2024-2025 **pour le 19/12/2024**

EXERCICE

L'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^n \qquad \|x\|=\max_{1\leq k\leq n}|x_k|\ .$$

Soit φ un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. On dira que φ est un **endomorphisme borné** si, pour tout vecteur x de $\mathbb{C}^n$, la suite $\Big(\big\|\varphi^p(x)\big\|\Big)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, avec $\varphi^p=\varphi\circ\cdots\circ\varphi$ (p facteurs).

On note id l'application identique de $\mathbb{C}^n$.

1.a. Montrer que, si φ est un endomorphisme borné de $\mathbb{C}^n$, alors toutes ses valeurs propres sont de module inférieur ou égal à 1.

b. À l'aide d'un endomorphisme simple de $\mathbb{C}^2$ (*on pourra raisonner matriciellement*), montrer que la réciproque du **a.** est fausse.

c. Montrer que la réciproque du **a.** est vraie pour un endomorphisme diagonalisable.

2. Soit φ un endomorphisme borné de $\mathbb{C}^n$, soit λ une valeur propre de φ, de module 1. On considère un vecteur $x\in\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda\,\mathrm{id})^2$, et on pose $y=\varphi(x)-\lambda x$.

a. Exprimer $\varphi^p(x)$ sous forme d'une combinaison linéaire de x et de y dont les coefficients dépendent de p et de λ.

b. En déduire que le vecteur x appartient à $\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda\,\mathrm{id})$.

c. Montrer que $\mathbb{C}^n=\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda\,\mathrm{id})\oplus\mathrm{Im}(\varphi-\lambda\,\mathrm{id})$.

3. Soient p, q, r trois réels strictement positifs, de somme 1. Soit $M=\begin{pmatrix}p&q&r\\q&p&r\\q&r&p\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à M.

Montrer que $\mathbb{C}^3=\mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{id})\oplus\mathrm{Im}(\varphi-\mathrm{id})$.

PROBLÈME

PARTIE A.

Dans cette partie, on note f l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad f(x)=x\,e^x\ .$$

1. Justifier que f réalise une bijection de l'intervalle $[-1,+\infty[$ sur l'intervalle $\big[-e^{-1},+\infty\big[$.

Dans la suite du sujet, la réciproque de cette bijection est notée U. On rappelle que ceci signifie que, pour tout réel x tel que $x\geq -e^{-1}$, le réel $U(x)$ est l'unique solution de l'équation $f(t)=x$, d'inconnue $t\in[-1,+\infty[$.

L'objectif du problème est d'obtenir un développement en série entière de la fonction U sur un certain intervalle $]-R,R[$ avec $R>0$.

2. Justifier que U est continue sur $\big[-e^{-1},+\infty\big[$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\big]-e^{-1},+\infty\big[$.

3. Expliciter $U(0)$ et $U'(0)$.

4. Déterminer un équivalent de $U(x)$ lorsque $x\to 0$, et un équivalent de $U(x)$ lorsque $x\to+\infty$.

5. Tracer, sur le même dessin, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_U$ représentatives des fonctions f et U. Préciser les tangentes aux deux courbes au point d'abscisse 0, ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_U$ au point d'abscisse $-e^{-1}$.

6. Pour quels réels α la fonction $x\mapsto x^\alpha\,U(x)$ est-elle intégrable sur $]0,1]$?

7. Pour quels réels α la fonction $x\mapsto x^\alpha\,U(x)$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$?

PARTIE B.

On considère dans cette partie un entier naturel n et un nombre complexe a. On définit une famille de polynômes $(A_0, A_1, \cdots, A_n)$ en posant

$$A_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1, n]\!] \quad A_k = \frac{1}{k!}\, X(X - ka)^{k-1} .$$

8. Montrer que la famille $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \cdots, A_n)$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

9. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, prouver la relation $A'_k(X) = A_{k-1}(X - a)$.

10. Calculer $A_k^{(j)}(ja)$ pour $(j, k) \in [\![0, n]\!]^2$. *Distinguer suivant que $j < k$, $j = k$ ou $j > k$.*

11. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que ses coordonnées dans la base $\mathcal{A}$ sont les $P^{(j)}(ja)$, $0 \leq j \leq n$.

12. En déduire l'identité

$$\forall (a, x, y) \in \mathbb{C}^3 \qquad (x + y)^n = y^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\, x\,(x - ka)^{k-1}\,(y + ka)^{n-k} .$$

13. Établir la relation, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall (a, y) \in \mathbb{C}^2 \qquad n y^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\, (-ka)^{k-1}\,(y + ka)^{n-k} .$$

PARTIE C.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{(-n)^{n-1}}{n!}$. On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ lorsque c'est possible.

14. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 1} a_n x^n$.

15. Justifier que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et, pour tout entier naturel n, exprimer $S^{(n)}(0)$ en fonction de n.

16. Montrer que la fonction S est définie et continue sur $[-R, R]$.

17. Montrer que

$$\forall x \in\,]-R, R[\qquad x\,\big(1 + S(x)\big)\, S'(x) = S(x) .$$

On pourra utiliser le résultat de la question **13.**

Pour $x \in\,]-R, R[$, on pose $h(x) = S(x)\, e^{S(x)}$.

18. Montrer que h est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle **(E):** $xy' - y = 0$.

19. Résoudre l'équation différentielle **(E)** sur $]0, R[$, sur $]-R, 0[$, puis sur $]-R, R[$.

20. En déduire que $\forall x \in\,]-R, R[\quad S(x) = U(x)$, la fonction U ayant été introduite dans la **PARTIE A.**

On a ainsi obtenu un développement en série entière de la fonction U sur $]-R, R[$.

21. Prouver la convergence et calculer la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}\, e^{-n}}{n!}$.