DS de MATHÉMATIQUES numéro 4 COMMENTAIRES
PSI2 2024-2025

PROBLÈME 1

A.2.d. Ne pas oublier de mentionner la **linéarité**! Bien sûr elle est immédiate et personne ne vous reprochera, je pense, de ne pas développer le calcul de $\Phi(\lambda M + N)$, mais le mot "**linéaire**" doit impérativement être écrit quelque part.

A.2.e. Ici, le calcul doit être développé et l'équivalence (CNS) doit être mise en valeur dans la rédaction.

A.2.f. L'affirmation "$\dim \mathcal{C}_A = 4$" figure souvent sans aucune justification, je suppose que c'est parce que vous avez lu la question suivante. En tout cas, ça n'a pô rapporté de point!

Une justification complète de cette affirmation consistait à utiliser l'isomorphisme Φ qui, comme tout isomorphisme qui se respecte, conserve les dimensions. La question **e.** permettait en effet de déterminer la dimension de $\mathcal{C}_D$, et l'isomorphisme Φ envoie $\mathcal{C}_A$ sur $\mathcal{C}_D$.

A.2.g. On peut bien sûr calculer la matrice A^3 et vérifier avec les coefficients des matrices que, si une combinaison linéaire de I_4, A, A^2 et A^3 est nulle, alors tous les coefficients sont nuls: c'est moche mais ça marche.

Comme méthodes plus élégantes:

- on peut remarquer que, si un polynôme annule la matrice A, alors il admet pour racines les quatre valeurs propres de A, donc s'il est de degré au plus 3 c'est forcément le polynôme nul ;

- on peut aussi se ramener à une combinaison linéaire des matrices diagonales I_4, D, D^2 et D^3 et, en annulant les coefficients, on tombe sur un système de Vandermonde. Vous êtes d'ailleurs un certain nombre à avoir écrit ce système et à n'avoir pas reconnu ce cher Alexandre-Théophile (VdM)...

A.3.c. Des calculs un peu longs, mais pas inextricables! J'ai été surpris de voir que plusieurs d'entre vous présentent comme valeurs propres de φ des λ_k qui sont en fait des polynômes!!!

B.2. Le résultat étant donné, il est possible de le montrer par récurrence, en n'oubliant pas que c'est une "récurrence double". De toutes façons, il y a du calcul.

B.3 C'est bien de constater que $\dfrac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} n+1$ mais, pour en déduire que $D_n(0) = n+1$, il faudrait mentionner la <u>**continuité**</u> de la fonction D_n (c'est la composée de la fonction polynomiale χ_n et de la fonction $x \mapsto 2\cos(x)$).

Noter aussi qu'il ne s'agit pas de"prolonger par continuité" la fonction D_n, il s'agit juste de calculer sa valeur en 0 puisqu'elle est déjà définie en ce point, par exemple par $D_n(0) = \chi_n(2) = \det(2I_n - B_n)$.

B.4. Les bonnes valeurs propres apparaissent sur certaines copies, mais il est rarement prouvé qu'elles sont distinctes (cela résulte de l'injectivité de la fonction cosinus sur $[0, \pi]$) et, du coup, on ne sait pas vraiment si vous avez obtenu **toutes** les valeurs propres de B_n.

C.2. Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne se résume pas à une liste finie $(x_0, \cdots, x_{n+1})$, il faut envisager de "construire" les x_k pour $k > n+1$.

C.3. et C.4. Quelques erreurs sur l'expression du terme général d'une suite satisfaisant une relation de récurrence linéaire d'ordre deux (des confusions avec les solutions des équations différentielles linéaires). Relire le cours!

PROBLÈME 2

1.a. Sont mentionnés dans le programme de PCSI la "liberté d'une famille de polynômes de degrés distincts" et la notion de "base de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$". Il est donc inutile de perdre son temps à développer la démonstration!

1.b. Si $k \geq 1$, on a $\Delta(N_k) = N_{k-1}$, et N_{k-1} n'a pas toujours été reconnu!

2.b. Beaucoup de réponses exactes, mais rarement démontrées correctement, **cela ne rapporte souvent pas beaucoup de points d'affirmer sans démontrer!**

4.b. Un petit développement, mentionnant par exemple le nombre de facteurs négatifs, aurait été le bienvenu.

4.d. L'encadrement de $\left|N_k(t)\right|$ permet d'encadrer $|I_k|$ car, la fonction N_k gardant un signe constant sur $[0,1]$, on a $\left|\displaystyle\int_0^1 N_k(t)\,\mathrm{d}t\right| = \displaystyle\int_0^1 \left|N_k(t)\right|\mathrm{d}t$. Cela n'a été vu sur aucune copie.

4.e. Sur les rares copies abordant cette question, il est question de convergence normale... mais ce n'est pas la bonne (confusion des variables). Ici, on doit fixer $x \in\,]-1,1[$ et considérer les fonctions $u_k : t \mapsto x^k\,N_k(t)$. La série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur le **segment** $[0,1]$ (il faut alors le démontrer "à la main") et c'est cela qui autorise l'interversion.

4.f. Il faut bien sûr vérifier les hypothèses du TSSA, et la décroissance de la suite $\left(|I_k|\,x^k\right)$ me semble loin d'être évidente.

COMMENTAIRES GÉNÉRAUX

Il y avait beaucoup de questions "faciles" dans ce sujet, ce qui a limité la casse. J'ai été toutefois déçu par de nombreuses copies où, bien souvent, dès que les choses se compliquent un peu ou demandent un peu d'abstraction, cela devient très confus, les arguments cités étant souvent erronés, des résultats étant parfois présentés sans aucune justification.

Il va donc falloir travailler la rédaction et l'argumentation, autrement dit s'entraîner à travailler sur des problèmes et, pas seulement en les survolant, mais en approfondissant et en s'imposant de rédiger posément les questions faisant appel au raisonnement et ne se résumant pas à des suites de calculs.