ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES et FONCTIONS VECTORIELLES
PSI2 2024-2025

Équations linéaires scalaires d'ordre un.

1. Soit l'équation différentielle **(E)** : $x(1+x)\,y' + (1+x)\,y = 1$.

a. Résoudre l'équation **(E)** sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$.

b. Montrer que **(E)** n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$, mais qu'il existe une et une seule solution sur $]-1,+\infty[$.

c. Préciser le lieu des points à tangente horizontale sur les courbes intégrales de **(E)**.

2. Résoudre, sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, l'équation différentielle $y' - (\tan x)y + \cos^2 x = 0$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$. On étudie l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) : \qquad y' + \alpha y = f(t)\ .$$

a. Montrer que, si y est solution de **(E)** sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $t \mapsto y(t+T)$ est aussi solution de **(E)**.

b. En déduire qu'une solution y de **(E)** est T-périodique si et seulement si $y(T) = y(0)$.

c. Montrer que l'équation **(E)** admet une unique solution T-périodique, sauf pour des valeurs exceptionnelles de α que l'on précisera.

4. Soit α un réel. En discutant selon α, déterminer la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_\alpha$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathbf{E}_\alpha)$: $xy' - \alpha y = 0$.

5. Soit l'équation différentielle **(E)** : $y' - ay = b(x)$, avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonction continue et bornée. Montrer que l'équation **(E)** admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}_+$. *On exprimera les solutions sous forme intégrale.*

Équations linéaires scalaires d'ordre deux.

6. En recherchant les solutions développables en série entière, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1+x^2)\,y'' + 4x\,y' + 2y = 0\ .$$

7. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' - 2y' + y = |x| \\ y(1) = 3\ ;\ y'(1) = 1 \end{cases}$.

8. Soit l'équation différentielle **(E)** : $xy'' + 2y' + xy = 0$.

a. Rechercher les solutions de **(E)** développables en série entière.

b. Donner les solutions de **(E)** sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}$. *On cherchera les solutions sous la forme $y = zy_0$, où y_0 est une solution non nulle obtenue en* **a.** *et z est une fonction inconnue supposée de classe $\mathcal{C}^2$.*

c. Vérifier les résultats du **b.** en utilisant un changement de fonction inconnue.

9. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $xy'' - y' + 8x^3 y = x^3 \cos(\sqrt{2}x^2)$. *On pourra effectuer le changement de variable $t = x^2$.*

10. En posant $z = e^{x^2} y$, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' + 4x\, y' + (3 + 4x^2)\, y = 0\ .$$

11. Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle $x^3 y'' + x y' - y = 0$. *On commencera par chercher une solution polynomiale non nulle.*

12. Résoudre, sur $]0, 1[$, l'équation différentielle $x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$. *On commencera par chercher une solution développable en série entière dans un voisinage de 0.*

13. À l'aide du changement de variable $x = \tan t$, résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$(1 + x^2)^2\, y'' + 2(x - 1)(1 + x^2)\, y' + y = 0\ .$$

14. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Soit $\Phi : E \to E$ définie par $\Phi(f) = g$, où, pour tout x réel, on pose

$$g(x) = \Phi(f)(x) = f'(x) - x\, f(x)\ .$$

a. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b. Déterminer les éléments propres de Φ.

c. Déterminer le noyau de Φ^2.

15. Soient $a, b : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues, soient f_1 et f_2 deux fonctions solutions sur I de l'équation différentielle

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0\ .$$

Pour $x \in I$, on pose $w(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}$. Montrer que w et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et que w est solution sur I d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on précisera.

16. Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, positive, non identiquement nulle. Soit f une fonction solution de l'équation différentielle **(E):** $y'' + q(x)\, y = 0$. On suppose que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

a. On suppose $f > 0$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que la courbe représentative de f est située en-dessous de chacune de ses tangentes. En déduire une contradiction.

b. Adapter la question précédente au cas où $f < 0$ sur $\mathbb{R}$.

c. Énoncer le résultat que l'on a démontré concernant les solutions de l'équation **(E)**.

Problèmes se ramenant à une équation différentielle

17. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) + f(-x) = x + \cos x\ .$$

On pourra écrire f sous la forme $f = g + h$, avec g paire et h impaire.

18. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodiques, de classe $\mathcal{C}^1$, vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = f(x - \pi) + \sin x \ .$$

19. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) + \int_0^x (x - t)\, f(t)\, \mathrm{d}t = 1 - x \ .$$

Dérivation des fonctions vectorielles

20. Soit E un espace euclidien, soit $f : [a, b] \to E$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, de dérivée bornée sur $]a, b[$: $\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall t \in]a, b[\quad \|f'(t)\| \leq M$. En considérant l'application $\varphi : t \mapsto \big(f(b) - f(a) | f(t)\big)$, montrer l'inégalité

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a) \ .$$

21. Soit E un espace euclidien, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\forall t \in I \quad f(t) \neq 0$. On pose $\varphi(t) = \|f(t)\|$ pour tout $t \in I$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, et calculer φ' et φ''.

Réponse partielle. On obtient $\varphi'(t) = \dfrac{\big(f(t)|f'(t)\big)}{\|f(t)\|}$.

22. Soit $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad M(t)^\top M(t) = I_n \ ,$$

i.e. pour tout t réel, $M(t)$ est une matrice orthogonale.

Montrer que, pour tout t réel, la matrice $M'(t)$ est non inversible.

23. Soient u, v, w trois fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ à valeurs réelles. On suppose que $\begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0$.

Systèmes différentiels linéaires

24. Résoudre le système différentiel linéaire d'écriture matricielle $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pourra poser le changement de fonction inconnue $X(t) = \mathrm{e}^t\, Y(t)$.

25. Résoudre le système différentiel $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x' & = & 2x & - & y & - & z \\ y' & = & -x & + & 2y & - & z \\ z' & = & -x & - & y & + & 2z \end{array} \right.$.

26. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique

$$\forall (X,Y) \in \big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2 \qquad (X|Y) = X^\top Y$$

et de sa norme euclidienne canonique.

a. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Soit le système différentiel

$$\textbf{(S)} : \quad X'(t) = A\,X(t) \iff \begin{cases} x'(t) &= y(t) + 2z(t) \\ y'(t) &= -x(t) + 2z(t) \\ z'(t) &= -2x(t) - 2y(t) \end{cases}.$$

Soit $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ une fonction vectorielle solution du système **(S)**. On introduit les fonctions

$$f : t \mapsto 2x(t) - 2y(t) + z(t) \qquad \text{et} \qquad g : t \mapsto \big(x(t)\big)^2 + \big(y(t)\big)^2 + \big(z(t)\big)^2 .$$

Sans résoudre explicitement le système **(S)**, montrer que les fonctions f et g sont constantes sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, soit X une solution du système différentiel $X' = AX$. Montrer que $t \mapsto \big\|X(t)\big\|$ est constante.

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non inversible. Montrer qu'il existe $L \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telle que $L^\top A = 0$. Montrer que l'ensemble $\big\{X(t) - X(0)\ ;\ t \in \mathbb{R}\big\}$ est inclus dans un hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercices avec Python

27. Soit l'équation différentielle **(E)**: $(1-x)^3\, y'' - y = 0$.

On note f l'unique solution de **(E)** sur $]-\infty, 1[$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

a. Justifier l'existence et l'unicité de f.

b. Tracer une approximation du graphe de f sur $[0\ ;\ 0,09]$ en utilisant la méthode d'Euler.

c. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$.

Pour tout n entier naturel, on pose $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

d. Pour $n \geq 1$, trouver une relation de récurrence liant les coefficients a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}.

e. Avec Python, calculer a_n pour $n \in [\![0, 20]\!]$.

f. Montrer que $|a_n[\leq 4^n$ pour tout n.

g. Que peut-on en déduire concernant la fonction f ?