Normes, suites convergentes, normes équivalentes.

1. On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. On note B_1 et B_∞ les boules unités fermées de $\mathbb{R}^n$ pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ respectivement, soit

$$B_1 = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\|_1 \leq 1\} \qquad \text{et} \qquad B_\infty = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\|_\infty \leq 1\} .$$

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|x\|_1 = \max_{y \in B_\infty} (x|y) \qquad \text{et} \qquad \|x\|_\infty = \max_{y \in B_1} (x|y) .$$

- -

• Si $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et si $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie $\|y\|_\infty \leq 1$, alors

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \Big|\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\,|y_i| \leq \|y\|_\infty \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \|x\|_1 ,$$

donc $\|x\|_1$ majore les produits scalaires $(x|y)$ avec $y \in B_\infty$. Enfin, si on choisit y tel que $y_i = \begin{cases} \dfrac{|x_i|}{x_i} & \text{si } x_i \neq 0 \\ 0 & \text{si } x_i = 0 \end{cases}$, alors $\|y\|_\infty \leq 1$ et $(x|y) = \displaystyle\sum_{i \text{ tels que } x_i \neq 0} |x_i| = \sum_{i=1}^n |x_i| = \|x\|_1$.

Ceci prouve que $\|x\|_1 = \max\limits_{y \in B_\infty} (x|y)$.

• Si maintenant $\|y\|_1 \leq 1$, alors $(x|y) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|\,|y_i| \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^n |y_i| \leq \|x\|_\infty$. Et, si $i_0 \in [\![1, n]\!]$ est un indice tel que $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$, en choisissant $y = \dfrac{|x_{i_0}|}{x_{i_0}}\, e_{i_0}$ (vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$) (si le vecteur x est non nul!), on a $\|y\|_1 = 1$ et $(x|y) = |x_{i_0}| = \|x\|_\infty$. Finalement,

$$\|x\|_\infty = \max\{(x|y)\ ;\ y \in \mathbb{R}^n\ ,\ \|y\|_1 \leq 1\} = \max_{y \in B_1} (x|y) .$$

---

2. Soient N et N' deux normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

a. On note $\overline{B}$ et $\overline{B}'$ les boules unités fermées, i.e.

$$\overline{B} = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\} \qquad \text{et} \qquad \overline{B}' = \{x \in E \mid N'(x) \leq 1\} .$$

Montrer que $\overline{B} = \overline{B}' \Longrightarrow N = N'$.

b. Même question avec les boules unités ouvertes B et B'.

- -

a. Si $x = 0$, on a évidemment $N(x) = N'(x) = 0$.

Sinon, notons que, si λ est un réel positif, alors

$$\lambda x \in \overline{B} \iff \lambda\, N(x) \leq 1 \iff \lambda \leq \frac{1}{N(x)} ,$$

donc $\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \lambda x \in \overline{B}\} = \left[0, \dfrac{1}{N(x)}\right]$, et $\dfrac{1}{N(x)} = \max\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \lambda x \in \overline{B}\}$. Il est maintenant clair que, si $\overline{B} = \overline{B}'$, alors $\dfrac{1}{N(x)} = \dfrac{1}{N'(x)}$, donc $N(x) = N'(x)$.

b. Si $x \in E$ est non nul, on a maintenant $\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \lambda x \in B\} = \left[0, \dfrac{1}{N(x)}\right[$, on en déduit que $\dfrac{1}{N(x)} = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \lambda x \in B\}$ et on conclut de la même façon.

---

3. Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}^2}$.

Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que l'on a

$$\forall (A,B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2 \qquad \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\| \ .$$

- -

On reconnaît la norme associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donné par

$$(A|B) = \sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j} = \mathrm{tr}(A^\top B) \ .$$

Notons $AB = C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors $c_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$ et

$$\|AB\|^2 = \sum_{i,j} c_{i,j}^2 = \sum_{i,j}\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}\right)^2 .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}\right)^2 \leq \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\|AB\|^2 &\leq \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \left(\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right)\right)\right] = \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right) \times \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\|B\|^2\right] = \|B\|^2 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right) = \|A\|^2\|B\|^2 \ .\end{aligned}$$

Donc $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

---

4. Pour toute matrice A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \displaystyle\max_{1 \leq i \leq n}\left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\right)$.

a. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que l'on a $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Pour tout $X = (\,x_1 \quad \cdots \quad x_n\,)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\|_\infty = \displaystyle\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Prouver la relation $\|AX\|_\infty \leq \|A\|\,\|X\|_\infty$.

d. Montrer que toute valeur propre réelle λ de la matrice A vérifie $|\lambda| \leq \|A\|$.

- -

a. On a bien sûr $\|A\| \geq 0$, et si $\|A\| = 0$, alors $\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ est nul pour tout i, ce qui entraîne que $a_{i,j}$ est nul pour tout i et pour tout j (une somme de réels positifs est nulle **ssi** chaque terme est nul), on a ainsi prouvé l'axiome de séparation. L'homogénéité est une simple formalité. Pour l'inégalité triangulaire, on utilise d'abord l'inégalité triangulaire sur la valeur absolue dans $\mathbb{R}$: pour tout couple (i,j), $|a_{i,j} + b_{i,j}| \leq |a_{i,j}| + |b_{i,j}|$, d'où pour tout i, $\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \leq \|A\| + \|B\|$, puis

$$\|A+B\| = \max_i \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \Big) \leq \max_i \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \Big) \leq \|A\| + \|B\| \ .$$

b. Posons $C = (c_{i,j}) = AB$, alors $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$ puis, pour tout i,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |c_{i,j}| &= \sum_{j=1}^{n} \Big| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \Big| \leq \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k} b_{k,j}| \Big) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \Big(|a_{i,k}| \sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}| \Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \big(|a_{i,k}| \, \|B\| \big) \\ &\leq \|B\| \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \leq \|A\| \, \|B\| \ . \end{aligned}$$

Certaines des inégalités ci-dessus sont systématiquement des égalités, mais il m'a semblé plus clair de le présenter ainsi.

La majoration obtenue ci-dessus étant vraie pour tout i, elle reste vraie pour le maximum, donc $\|C\| = \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

c. Posons $AX = Y = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^\top$, alors $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$ pour tout i, donc

$$|y_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \, |x_j| \leq \Big(\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \Big) \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leq \|A\| \, \|X\|_\infty \ .$$

Cette inégalité étant vraie pour tout i, on a prouvé que $\|Y\|_\infty = \|AX\|_\infty \leq \|A\| \, \|X\|_\infty$.

d. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A, il existe $X \in \mathbb{R}^n$ **non nul** tel que $AX = \lambda X$. On a alors $\|AX\|_\infty = \|\lambda X\|_\infty = |\lambda| \, \|X\|_\infty \leq \|A\| \, \|X\|_\infty$, d'où $|\lambda| \leq \|A\|$ puisque $\|X\|_\infty$ est un réel strictement positif.

---

5. Soit $E = \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Pour $f \in E$, on pose $N_\infty(f) = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

a. Soit $g \in E$ telle que $\forall x \in [0,1] \quad g(x) \neq 0$. Pour tout $f \in E$, on pose $N_g(f) = N_\infty(fg)$. Montrer que N_g est une norme sur E, et qu'elle est équivalente à la norme N_∞.

b. Soit $g : x \mapsto x - \dfrac{1}{2}$; l'application N_g définie comme ci-dessus est-elle une norme sur E ? Si oui, est-elle équivalente à la norme N_∞ ?

- -

a. • L'axiome d'homogénéité et l'inégalité triangulaire pour N_g se déduisent immédiatement des mêmes axiomes pour N_∞ (on sait que N_∞ est une norme).

Voyons maintenant l'axiome de séparation. Soit $f \in E$ telle que $N_g(f) = 0$, i.e. $N_\infty(fg) = 0$, on a alors $fg = 0$, c'est-à-dire $f(x)g(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Comme g ne s'annule pas, on en déduit bien que f est la fonction nulle. Donc N_g est une norme sur E.

• Comme g est continue sur le segment $[0,1]$, elle est bornée, et on a clairement

$$\forall f \in E \qquad N_g(f) = N_\infty(fg) \leq N_\infty(g) \cdot N_\infty(f) \ .$$

Mais la fonction $|g|$, continue sur $[0,1]$, admet aussi un minimum m avec $m > 0$ puisque g ne s'annule pas. Si $f \in E$ et $x \in [0,1]$, on a donc les majorations

$$\big|f(x)\big| = \frac{1}{\big|g(x)\big|}\,\big|f(x)\,g(x)\big| \leq \frac{1}{m}\,\big|f(x)\,g(x)\big| \leq \frac{1}{m}\,N_g(f) \ ,$$

puis $N_\infty(f) \leq \dfrac{1}{m}\,N_g(f)$.

Les inégalités $m\,N_\infty(f) \leq N_g(f) \leq N_\infty(g) \cdot N_\infty(f)$ montrent que les normes N_∞ et N_g sont équivalentes sur E.

b. • Il n'y a toujours aucune difficulté pour l'axiome d'homogénéité et l'inégalité triangulaire. La fonction g s'annule uniquement au point $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Si $f \in E$ vérifie $N_g(f) = 0$, alors la fonction fg est nulle sur $[0,1]$, ce qui entraîne que f est nulle sur $[0,1] \setminus \{\alpha\}$. Comme f est continue sur $[0,1]$, elle est aussi nulle au point α, donc $f = 0$. L'axiome de séparation est encore satisfait et N_g est une norme sur E.

• Pour tout $n \geq 2$, considérons la fonction f_n qui est nulle sur $\left[0\ ,\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}\right]$ et sur $\left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\ ,\ 1\right]$, affine sur les intervalles $\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}\ ,\ \dfrac{1}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{1}{2}\ ,\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\right]$ avec $f_n\Big(\dfrac{1}{2}\Big) = 1$. *Cette fonction f_n est continue et "affine par morceaux" sur $[0,1]$, et elle fait un pic de hauteur 1, mais de plus en plus étroit lorsque n augmente, au voisinage de $\dfrac{1}{2}$. Faire un dessin!* On a $N_\infty(f_n) = 1$ pour tout n. Mais la fonction $f_n g$ est nulle en dehors du segment $\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}\ ,\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\right]$, et elle est positive et majorée par $g\Big(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}\Big) = g\Big(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\Big) = \dfrac{1}{n}$, donc $N_g(f_n) = N_\infty(f_n g) \leq \dfrac{1}{n}$. Donc $\dfrac{N_\infty(f_n)}{N_g(f_n)} \geq n$, le rapport $\dfrac{N_\infty}{N_g}$ n'est pas majoré, ces deux normes ne sont donc pas équivalentes.

6. Soit l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^2\big([0,1], \mathbb{R}\big)$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \ ; \quad N'(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \ ; \quad N''(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \int_0^1 |f''(x)|\mathrm{d}x \ .$$

a. Montrer que N, N' et N'' sont des normes sur E.

b. Montrer les inégalités $N \leq N' \leq N''$.

c. Ces trois normes sont-elles équivalentes ?

- -

a. N est une norme sur E (exemple traité en cours, c'est la norme N_1, dite "de la convergence en moyenne"). Pour les autres, la seule "difficulté" (c'est un bien grand mot) est l'axiome de séparation : si $f \in E$ vérifie $N'(f) = 0$, alors $f(0) = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 |f'(x)|\ \mathrm{d}x = N(f') = 0$ (si la somme de deux réels positifs est nulle, alors les deux sont nuls), donc $f' = 0$ puisque $N = N_1$ est une norme (ou encore car une fonction **continue** et positive dont l'intégrale est nulle est la fonction nulle, c'est le "théorème de stricte positivité"), donc f est constante, puis $f = 0$ car on sait qu'elle s'annule en zéro. De la même façon, si $N''(f) = 0$, alors $f'' = 0$ donc f est affine, et $f(0) = f'(0) = 0$, donc $f = 0$.

b. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t)\ \mathrm{d}t$, donc

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \left|\int_0^x f'(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\ \mathrm{d}t \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\ \mathrm{d}t = N'(f) \ ,$$

d'où (en intégrant sur $[0,1]$ cette dernière inégalité) : $\forall f \in E \quad N(f) \leq N'(f)$. De même, si f est de classe $\mathcal{C}^2$,

$$N'(f) = |f(0)| + N(f') \leq |f(0)| + N'(f') = N''(f) \ .$$

On a ainsi obtenu les inégalités $N \leq N' \leq N''$.

c. Les normes N, N' et N'' sont deux à deux non équivalentes : en effet, considérons la suite de fonctions (f_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in [0,1] \quad f_n(x) = x^n$. Ces fonctions appartiennent à E, et on calcule

$$N(f_n) = \frac{1}{n+1} \qquad ; \qquad N'(f_n) = 1 \qquad ; \qquad N''(f_n) = n \ .$$

On voit donc que les rapports $\dfrac{N'}{N}$ et $\dfrac{N''}{N'}$, et donc aussi $\dfrac{N''}{N}$, ne sont pas majorés.

---

7. Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$.

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n$, on pose $\|X\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

a. Montrer que $\|AX\|_\infty \leq n\, \|A\|\, \|X\|_\infty$.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la suite $\big(\|A^k\|\big)_{k\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Montrer que les valeurs propres de A sont de module inférieur ou égal à 1.

- -

a. On a, pour tout i, $(AX)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$, d'où

$$\Big|(AX)_i\Big| = \Big|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\Big| \le \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,|x_j| \le \|A\| \sum_{j=1}^{n} |x_j| \le n\,\|A\|\,\|X\|_\infty\ .$$

b. Supposons $\|A^k\| \le M$ pour tout k. Alors, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, si X est un vecteur propre associé, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \|A^kX\|_\infty = \|\lambda^kX\|_\infty = |\lambda|^k\,\|X\|_\infty \le n\|A^k\|\,\|X\|_\infty \le nM\,\|X\|_\infty\ ,$$

donc $|\lambda|^k \le nM$, la suite $\big(|\lambda|^k\big)$ est bornée, d'où $|\lambda| \le 1$.

---

8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels, de carré sommable, i.e. telle que la série $\sum u_n^2$ converge. Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{n}$ est convergente, et prouver l'existence d'une constante positive C (indépendante du choix de la suite (u_n)) telle que

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}\right| \le C\cdot\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2\right)^{\frac12}\ .$$

Quelle est "la meilleure" constante C possible ?

- -

Soit n un entier naturel non nul, alors en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, connaissant $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|u_k|}{k} \le \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{k=1}^{n} u_k^2\Big)^{\frac12} \le \frac{\pi}{\sqrt6}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2\Big)^{\frac12}\ .$$

La série à termes positifs $\sum_{n\ge1} \frac{|u_n|}{n}$ a donc des sommes partielles majorées, elle est donc convergente. Autrement dit, la série $\sum \frac{u_n}{n}$ est absolument convergente. Par ailleurs, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}\right| \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|u_n|}{n} \le \frac{\pi}{\sqrt6}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} u_k^2\Big)^{\frac12}\ .$$

La constante $C = \frac{\pi}{\sqrt6}$ convient donc. Cette constante est optimale (c'est-à-dire la plus petite possible), il suffit pour cela de constater que, en choisissant la suite (u_n) telle que $u_n = \frac{1}{n}$, l'inégalité démontrée ci-dessus est alors une égalité (cela correspond au cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

---

9. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $p \in [1, +\infty[$, on pose $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Montrer que $\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

- -

- Si $x = 0$, alors $\|x\|_\infty = 0$ et, pour tout $p \geq 1$, $\|x\|_p = 0$ à condition de convenir que $0^\alpha = 0$ pour tout réel α strictement positif. Alors on a bien $\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

- Si $x \neq 0$, alors on a $|x_i|^p \leq \|x\|_\infty^p$ pour tout i, donc $\|x\|_\infty^p \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \leq n \|x\|_\infty^p$, puis $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$. Comme $n^{\frac{1}{p}} = e^{\frac{1}{p} \ln n} \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, le théorème "des gendarmes" donne $\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

---

10. Soient $a_1, \cdots, a_n$ des réels. À quelle condition l'application $N : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$N : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto a_1|x_1| + \cdots + a_n|x_n|$$

définit-elle une norme sur $\mathbb{K}^n$?

- -

Pour que N soit une norme, il est nécessaire que tous les a_i soient strictement positifs. En effet, si l'un des réels a_i est négatif ou nul, en notant e_i le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a $N(e_i) = a_i \leq 0$, ce qui est absurde pour un vecteur non nul.

Cette condition de stricte positivité des a_i est aussi suffisante puisque, si elle est réalisée, alors:
- l'application N est clairement à valeurs dans $\mathbb{R}_+$;
- si $N(x_1, \cdots, x_n) = 0$, alors $a_i|x_i|$ est nul pour tout i (*une somme de termes réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul*), puis $(x_1, \cdots, x_n) = (0, \cdots, 0)$;
- l'homogénéité est évidente ;
- l'inégalité triangulaire se déduit facilement de $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i|$, vrai pour tout i.

---

11. Soit a un réel. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} A_n^n$, avec $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- -

Solution astucieuse, et utilisant des notions peut-être pas encore étudiées. La matrice A_n est une matrice de rotation à un facteur près: en posant $\theta_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{n}\right)$, on a $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\tan\theta_n \\ \tan\theta_n & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos(\theta_n)} R(\theta_n)$, en posant $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour tout réel θ (matrice de la rotation d'angle θ). Comme on sait que $R(\theta)^n = R(n\theta)$, on a $A_n^n = \dfrac{1}{(\cos\theta_n)^n}\, R(n\theta_n)$. Or,

$$\cos(\theta_n) = \cos\Big(\operatorname{Arctan}\frac{a}{n}\Big) = \cos\left(\frac{a}{n} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) = 1 - \frac{a^2}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\ ,$$

donc

$$n\ \ln\big(\cos\theta_n\big) = n\ \ln\left(1 - \frac{a^2}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) = -\frac{a^2}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big) \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0\ ,$$

et $(\cos\theta_n)^n = e^{n\ \ln(\cos\theta_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Puis $n\theta_n = n\ \operatorname{Arctan}\Big(\dfrac{a}{n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
Par continuité des fonctions trigonométriques usuelles, on déduit

$$\lim_{n\to+\infty} A_n^n = R(a) = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}\ .$$

Autre méthode, plus dans l'esprit de ce qui a été fait pour le moment:
On diagonalise (dans $\mathbb{C}$) la matrice A_n: on constate d'abord que $\chi_{A_n}(x) = (x-1)^2 + \Big(\dfrac{a}{n}\Big)^2 = \Big(x-1-\dfrac{ia}{n}\Big)\Big(x-1+\dfrac{ia}{n}\Big)$, donc si a est non nul, A_n admet deux valeurs propres distinctes qui sont $1+\dfrac{ia}{n}$ et $1-\dfrac{ia}{n}$, elle est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Un petit calcul élémentaire donne $A_n = PD_nP^{-1}$, avec $D_n = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{ia}{n} & 0 \\ 0 & 1-\dfrac{ia}{n} \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$.
Ensuite, classiquement, $A_n^n = PD_n^nP^{-1}$, avec $D_n^n = \begin{pmatrix} \Big(1+\dfrac{ia}{n}\Big)^n & 0 \\ 0 & \Big(1-\dfrac{ia}{n}\Big)^n \end{pmatrix}$. Comme $1+\dfrac{ia}{n} = \sqrt{1+\dfrac{a^2}{n^2}}\ e^{i\ \operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{n}\right)}$, on déduit $\Big(1+\dfrac{ia}{n}\Big)^n = \Big(1+\dfrac{a^2}{n^2}\Big)^{\frac{n}{2}} e^{in\ \operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{ia}$ (*détails de calculs laissés au lecteur*). Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} D_n^n = E = \begin{pmatrix} e^{ia} & 0 \\ 0 & e^{-ia} \end{pmatrix}$. Enfin, "par continuité du produit matriciel", c'est-à-dire en utilisant la continuité de l'application linéaire $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) & \to \quad \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto \quad PMP^{-1} \end{cases}$, on conclut que

$$A_n^n = PD_n^nP^{-1} = \varphi(D_n^n) \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad \varphi(E) = PEP^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}\ .$$

Topologie.

12. Soit E un espace vectoriel normé, soit F un sous-espace vectoriel de E.

Deux questions indépendantes

a. Montrer que l'adhérence $\overline{F}$ de F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Montrer que, si F admet un point intérieur, alors $F = E$.

- -

a. Il est clair que $0_E \in F \subset \overline{F}$, donc $\overline{F} \neq \emptyset$. Par ailleurs, soient x et y deux points de $\overline{F}$, soient λ et μ deux scalaires : par caractérisation séquentielle des points adhérents, on sait qu'il existe deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de F convergeant vers x et y respectivement. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda x + \mu y$ (opérations algébriques sur les suites convergentes) et, comme $\lambda x_n + \mu y_n \in F$ pour tout n, on en déduit que $\lambda x + \mu y \in \overline{F}$. L'ensemble $\overline{F}$ est donc stable par combinaisons linéaires, ce qu'il fallait démontrer.

b. Soit a un point intérieur à F, il existe donc $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset F$; on a alors $B(0_E, r) \subset F$: en effet, si $x \in B(0_E, r)$, on écrit $x = (a+x) - a$ avec $\begin{cases} a & \in B(a,r) \subset F \\ a+x & \in B(a,r) \subset F \end{cases}$ et, comme F est un sous-espace vectoriel de E, on déduit $x \in F$. Le point 0_E est donc intérieur au s.e.v. F. Si on prend $x \in E$ non nul, alors le vecteur $y = \dfrac{r}{2\|x\|}x$ a pour norme $\dfrac{r}{2}$, donc il appartient à F et, comme F est un s.e.v., on a $x = \dfrac{2\,\|x\|}{r}\,y \in F$. Donc $F = E$.

Par contraposition, on a montré qu'un sous-espace vectoriel strict de E n'a aucun point intérieur.

---

13. Soient p_1 et p_2 les applications coordonnées sur $\mathbb{R}^2$ définies par $p_1(x,y) = x$ et $p_2(x,y) = y$.

a. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Montrer que les ensembles $p_1(U)$ et $p_2(U)$ sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}$.

b. Soit $H = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 1\big\}$. Montrer que H est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. Les ensembles $p_1(H)$et $p_2(H)$ sont-ils fermés dans $\mathbb{R}$?

- -

a. Si U est vide, alors $p_1(U)$ et $p_2(U)$ sont vides, et c'est réglé. Sinon, soit x_0 un réel appartenant à $p_1(U)$, il existe donc un réel y_0 tel que le couple $a = (x_0, y_0)$ appartienne à U. Comme U est ouvert, a est intérieur à U: il existe $r > 0$ tel que $B_2(a,r) \subset U$, où $B_2(a,r)$ est la boule ouverte de centre a et de rayon r pour la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$. Mais cette boule contient tous les points de la forme (x, y_0) avec $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$. L'ensemble $p_1(U)$ contient alors l'intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$ et est donc un voisinage de x_0 dans $\mathbb{R}$, i.e. le réel x_0 est intérieur à l'ensemble $p_1(U)$. Donc $p_1(U)$ est ouvert, idem pour $p_2(U)$.

b. Soit $\big((x_n, y_n)\big)$ une suite convergente d'éléments de H, de limite (x,y). Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$, et on a $x_n y_n = 1$ pour tout n. En passant à la limite, on obtient $xy = 1$, donc $(x,y) \in H$, l'ensemble H est donc stable par passage à la limite, c'est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. Mais $p_1(H) = p_2(H) = \mathbb{R}^*$, ce n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

Limites et continuité des fonctions vectorielles de variable vectorielle

14. Étudier la limite éventuelle en $(0,0)$ des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ ci-dessous:

a. $(x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$; **b.** $(x,y) \mapsto \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$; **c.** $(x,y) \mapsto \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

- -

a. On note que, pour x non nul, $f(x,x) = \dfrac{1}{2}$ et $f(x,-x) = -\dfrac{1}{2}$. Ainsi, les suites de vecteurs $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n}\right)$ tendent toutes deux vers $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, mais on a

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}\,,$$

ce qui contredit (par caractérisation séquentielle) l'existence d'une limite de f en $(0,0)$.

b. Même conclusion qu'en **a.** avec $f(x,x) = \dfrac{3}{2}$ et $f(x,-x) = \dfrac{1}{2}$.

c. On peut par exemple voir que, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a

$$\big|f(x,y)\big| = \frac{x^2\,|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)\,|y|}{x^2+y^2} = |y|\ .$$

Comme $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, par encadrement, on déduit $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

---

15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$. On définit l'application $g : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \to \mathbb{R}$ par $g(x,y) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Montrer que g est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

- -

Il est clair que g est continue sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ par opérations usuelles sur les fonctions continues. Pour tout x réel, posons $g(x,x) = f'(x)$, on a ainsi une fonction g maintenant définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. Comme U est ouvert, g est continue en tout point de U.

Soit a un réel, montrons maintenant la continuité de g au point $(a,a) \in \Delta$, montrons-le "séquentiellement" : soit (x_n, y_n) une suite de points de $\mathbb{R}^2$ convergeant vers le point (a,a), ce qui signifie que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = a$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $g(x_n,y_n) = f'(t_n)$ avec $t_n \in [x_n, y_n]$ si $x_n < y_n$, ou $t_n \in [y_n, x_n]$ si $x_n > y_n$ (si $x_n = y_n$, on pose $t_n = x_n = y_n$, sinon cela résulte du théorème des accroissements finis). On a alors

$$|t_n - a| \leq \max\big\{|x_n - a|\ ,\ |y_n - a|\big\}\ ,$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} t_n = a$ et, f' étant continue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g(x_n,y_n) = \lim_{n\to+\infty} f'(t_n) = f'(a) = g(a,a)$. Ceci étant vrai pour toute suite (x_n,y_n) convergeant vers (a,a), on a montré la continuité de g au point (a,a) (caractérisation séquentielle de la continuité).

---

16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que son graphe $\Gamma = \Big\{ \big(x, f(x)\big) \ ; \ x \in \mathbb{R} \Big\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. Réciproque ? *Considérer* $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ *prolongée par la valeur 0 en 0.*

- -

• Utilisons la caractérisation séquentielle des parties fermées (ce sont les parties stables par passage à la limite). Soit $\big((x_n, y_n)\big)$ une suite de points de Γ, l'application f étant supposée continue. Supposons cette suite convergente, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n, y_n) = (x, y)$, soit encore $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$, et montrons que $(x, y) \in \Gamma$. Comme, pour tout n, on a $(x_n, y_n) \in \Gamma$, cela signifie que $y_n = f(x_n)$. Mais, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ et que la fonction f est continue au point x, on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$. Comme on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ par hypothèse, l'unicité de la limite donne $y = f(x)$, autrement dit $(x, y) \in \Gamma$, youpi! Donc Γ est fermé.

• La réciproque est fausse. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. La fonction f n'est pas continue (discontinuité en 0). Mais son graphe est $\Gamma = \mathcal{H}_+ \cup \mathcal{H}_- \cup \{O\}$, où $\mathcal{H}_+$ est la branche d'hyperbole $\Big\{ \Big(x, \dfrac{1}{x}\Big) ; x > 0 \Big\}$, $\mathcal{H}_- = \Big\{ \Big(x, \dfrac{1}{x}\Big) ; x < 0 \Big\}$, et $O = (0, 0)$ est le point origine. Chacun des trois ensembles $\mathcal{H}_+$, $\mathcal{H}_-$ et $\{O\}$ est fermé (le vérifier par caractérisation séquentielle pour les deux premiers), donc Γ est fermé car c'est une réunion finie de fermés.

---

17. Soit A une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit a et b deux points de A, et y un réel tel que $f(a) \leq y \leq f(b)$.

Montrer qu'il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

- -

Comme A est convexe, on a $[a, b] \subset A$, i.e. $\forall t \in [0, 1] \quad (1 - t)a + tb \in A$. Soit l'application $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $\forall t \in [0, 1] \quad g(t) = f\big((1 - t)a + tb\big)$. On a alors $g = f \circ \varphi$ avec $\varphi : [0, 1] \to A$ définie par $\varphi(t) = (1 - t)a + tb$. Comme f est continue sur A (hypothèse de l'énoncé) et φ est continue sur $[0, 1]$ (c'est une fonction affine), alors la composée $g = f \circ \varphi$ est continue sur $[0, 1]$ à valeurs réelles, on peut donc lui appliquer le théorème des valeurs intermédiaires: on a $g(0) = f(a) \leq y \leq g(1) = f(b)$, il existe donc $t_0 \in [0, 1]$ tel que $g(t_0) = y$. En posant $x = \varphi(t_0) = (1 - t_0)a + t_0 b$, on a $x \in A$ et $f(x) = g(t_0) = y$.

---

18. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = P$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} B^k = Q$.

a. Montrer que P et Q sont des matrices de projecteurs. Calculer AP et PA.

b. On suppose que A et B commutent. Montrer que P et Q commutent.

- -

a. Comme la suite (A^k) converge vers P, il en est de même de toute suite extraite, ainsi $\lim\limits_{k\to+\infty} A^{2k} = P$. Mais on a aussi $A^{2k} = A^k A^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P^2$ par continuité du produit matriciel. Par unicité de la limite, on déduit $P^2 = P$. De même, $Q^2 = Q$.

Puisque $A^k \to P$, toujours par continuité du produit matriciel, $A\,A^k \to AP$, mais on a aussi $A\,A^k = A^{k+1} \to P$ car (A^{k+1}) est une suite extraite de (A^k). Par unicité de la limite, $AP = P$. On a de même $PA = P$.

b. Si A et B commutent, on montre par des récurrences immédiates que, pour tout k entier naturel, A commute avec B^k, et A^k commute avec B^k. Par continuité du produit matriciel, $A^kB^k \to PQ$ et $B^kA^k \to QP$. Comme $A^kB^k = B^kA^k$, par unicité de la limite, on déduit $PQ = QP$.

19*. On rappelle que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b. Le résultat reste-t-il vrai quand on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

- -

a. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il s'agit de prouver l'existence d'une suite (A_k) de matrices diagonalisables, qui converge vers A. L'idée est d'introduire une matrice triangulaire T semblable à A, puis de modifier légèrement ses coefficients diagonaux de telle sorte qu'ils soient tous distincts, ce qui conduira donc à une matrice diagonalisable.

Formalisons un peu : on écrit $A = PTP^{-1}$ avec $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure, et P inversible. Les coefficients diagonaux $t_{i,i}$ de T sont les valeurs propres de T et donc aussi de A. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons $A_k = P\,T_k\,P^{-1}$, avec $T_k = T + \operatorname{diag}\left(\dfrac{1}{k}, \dfrac{2}{k}, \cdots, \dfrac{n}{k}\right)$. La matrice T_k est encore triangulaire supérieure avec pour coefficients diagonaux les $t_{i,i}^{(k)} = t_{i,i} + \dfrac{i}{k}$, $1 \leq i \leq n$, qui sont donc les valeurs propres de T_k et aussi de A_k. Si les $t_{i,i}^{(k)}$, $1 \leq i \leq n$, sont deux à deux distincts, alors la matrice A_k est diagonalisable puisqu'elle admet n valeurs propres distinctes. Notons que $\lim\limits_{k\to+\infty} T_k = T$ (évident, puisque la convergence d'une suite de matrices peut s'étudier coefficient par coefficient), et on en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = A$ "par continuité du produit matriciel" ou, plus précisément puisque l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue (c'est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie). On va montrer que les matrices A_k sont diagonalisables pour k suffisamment grand, ce qui terminera l'exercice.

• si les $t_{i,i}$ sont tous égaux, alors, pour tout k, les $t_{i,i} + \dfrac{i}{k}$, avec $1 \leq i \leq n$ sont deux à deux distincts, et la matrice A_k est alors diagonalisable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$;

• sinon, soit $m = \min\left\{|t_{i,i} - t_{j,j}|\ ;\ t_{i,i} \neq t_{j,j}\right\}$ (c'est le plus petit écart entre deux coefficients diagonaux distincts) ; si $t_{i,i}^{(k)} = t_{j,j}^{(k)}$ avec $i \neq j$, alors $t_{i,i} \neq t_{j,j}$ et $|t_{i,i} - t_{j,j}| = \dfrac{|i-j|}{k} \leq \dfrac{n}{k}$, donc $\dfrac{k}{n} \leq \dfrac{1}{|t_{i,i} - t_{j,j}|} \leq \dfrac{1}{m}$ et $k \leq \dfrac{n}{m}$. Pour tout entier k supérieur à $\dfrac{n}{m}$, les $t_{i,i}^{(k)}$ sont donc deux à deux distincts et A_k est diagonalisable. En conclusion, l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b. La réponse est non : soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, son polynôme caractéristique est

$\chi_A = X^2 + 1$, $\text{tr}(A) = 0$, $\det(A) = 1$. Pour $M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, posons

$$\Delta(M) = (\text{tr } M)^2 - 4 \det M = (m_{1,1} + m_{2,2})^2 - 4\,(m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}m_{2,1}) \ :$$

$\Delta(M)$ est alors le discriminant du polynôme caractéristique de M puisqu'on vérifie facilement que $\chi_M = X^2 - (\text{tr } M)\, X + (\det M)$. Il est évident que l'application $\Delta : M \mapsto \Delta(M)$ est continue de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ car elle est polynomiale en les coefficients de la matrice M. On a ici $\Delta(A) = (\text{tr}(A))^2 - 4 \det(A) = -4 < 0$ donc, si M est une matrice suffisamment “proche” de A, on aura $\Delta(M) < 0$ et la matrice M n'aura pas de valeur propre réelle, donc ne sera pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. La matrice A proposée ne peut donc pas être approchée par des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. L'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre deux diagonalisables sur $\mathbb{R}$ n'est donc pas dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

---

20. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $d_n : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto d_n(A) = \det A$, est continue.

b. Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

c. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique. *On étudiera d'abord le cas particulier où A est inversible.*

- -

a. On peut raisonner par récurrence sur n. Pour $n = 1$, l'application $d_1 : \mathcal{M}_1(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ n'est autre que l'application identique de $\mathbb{K}$ (puisque, si $A = (a_{11}) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$, alors $d_1(A) = \det(A) = a_{11}$), elle est donc continue.

Soit $n \geq 2$, supposons l'application d_{n-1} continue sur $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$; alors la formule du développement d'un déterminant d'ordre n par rapport à la première colonne montre que $d_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\, \varphi_i \cdot d_{n-1} \circ f_i$, avec les notations suivantes : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

• φ_i est la forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui, à toute matrice A, associe son coefficient $a_{i,1}$ d'indices $(i, 1)$;

• f_i est l'application (évidemment linéaire) qui, à toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, associe la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ extraite de A en supprimant la i-ième ligne et la première colonne.

Comme φ_i et f_i sont linéaires en dimension finie, elles sont continues, donc d_n est continue comme somme, produit et composée d'applications continues.

b. $\text{GL}_n(\mathbb{K}) = \big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid d_n(A) \neq 0\big\} = d_n^{-1}(\mathbb{K}^*)$: le groupe linéaire $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est l'image réciproque par l'application continue d_n de l'ouvert $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ de $\mathbb{K}$, c'est donc un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors la matrice $A - \lambda I_n$ est inversible pour tout scalaire λ n'appartenant pas à $\text{Sp}(A)$. Comme le spectre de A est un ensemble fini, il existe une suite $(\lambda_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de scalaires n'appartenant pas à $\text{Sp}(A)$ et convergeant vers 0. La suite de matrices $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$, où l'on a posé $B_p = A - \lambda_p I_n$ est une suite de matrices inversibles convergeant vers A. L'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est donc dense dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

c. Si A est inversible, alors les matrices AB et BA sont semblables puisque $BA = A^{-1}(AB)A$, elles ont donc le même polynôme caractéristique.

Sinon, considérons une suite (A_k) de matrices inversibles convergeant vers A. Par continuité du produit matriciel, on déduit $\lim\limits_{k\to+\infty} A_kB = AB$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} BA_k = BA$. Puis, pour tout $z \in \mathbb{C}$ fixé, on a $\lim\limits_{k\to+\infty}(zI_n - A_kB) = zI_n - AB$, et enfin par continuité du déterminant (c'est-à-dire de l'application d_n étudiée en **a.**), on déduit que

$$\chi_{A_kB}(z) = \det(zI_n - A_kB) \quad \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \quad \det(zI_n - AB) = \chi_{AB}(z) \ .$$

De même, $\lim\limits_{k\to+\infty} \chi_{BA_k}(z) = \chi_{AB}(z)$.

Comme $\chi_{A_kB} = \chi_{BA_k}$ pour tout k puisque A_k est inversible, on a donc $\chi_{AB}(z) = \chi_{BA}(z)$, et ceci pour tout z, d'où l'égalité des polynômes χ_{AB} et χ_{BA}.

---

21. Soit $\big(E, \|\cdot\|\big)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, soit K une partie fermée bornée de E, soit $f : K \to K$ une application telle que

$$\forall (x,y) \in K^2 \qquad x \neq y \Longrightarrow \big\|f(x) - f(y)\big\| < \|x - y\| \ .$$

Montrer que f admet un unique point fixe dans K. *On pourra considérer l'application δ définie sur K par $\delta(x) = \big\|f(x) - x\big\|$.*

- -

L'unicité du point fixe est facile: s'il y en avait deux, x et y distincts, avec $f(x) = x$ et $f(y) = y$, alors l'hypothèse de l'énoncé donnerait $\|x - y\| < \|x - y\|$, ce qui est absurde!

L'application δ est continue sur K comme composée d'applications continues (l'application $x \mapsto \|x\|$ est continue car elle est 1-lipschitzienne, f aussi est continue car elle est 1-lipschitzienne), elle admet donc un minimum m sur le "compact" K (partie fermée bornée d'un espace vectoriel de dimension finie). Supposons $m > 0$, soit $x_0 \in K$ tel que $\delta(x_0) = \big\|f(x_0) - x_0\big\| = m$; on a alors $f(x_0) \in K$ et $f(x_0) \neq x_0$, on peut donc affirmer que

$$\Big\|f\big(f(x_0)\big) - f(x_0)\Big\| < \big\|f(x_0) - x_0\big\| = m \ ,$$

soit $\delta\big(f(x_0)\big) < m$, ce qui est absurde. L'hypothèse $m > 0$ étant absurde, on a $m = 0$, ce qui signifie l'existence de $x_0 \in K$ tel que $\big\|f(x_0) - x_0\big\| = 0$, autrement dit d'un point fixe de f.

---

22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose que A admet au moins une valeur propre réelle, et on note $\sigma(A) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de A. Soit $\rho(A) = \max\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$.

a. Montrer que l'application $X \mapsto |X^\top AX|$ admet un maximum sur l'ensemble

$$S = \big\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid X^\top X = 1\big\} \ .$$

b. Montrer que $\rho(A) \leq \max\limits_{X\in S} |X^\top AX|$.

- -

a. La partie S est la sphère unité pour la norme euclidienne canonique $\|\cdot\|_2$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ puisque $X^\top X = \|X\|_2^2$, c'est donc une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$.

L'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to \quad \mathbb{R} \\ \quad X & \mapsto \ |X^\top AX| \end{cases}$ est continue. En effet, l'application $\alpha : X \mapsto AX$ est continue car c'est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'application $\beta : (X,Y) \mapsto X^\top Y = (X|Y)$ est continue car c'est une forme bilinéaire sur l'espace de dimension finie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, enfin la valeur absolue $v : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\varphi : X \mapsto v\Big(\beta\big(X, \alpha(X)\big)\Big)$ est continue par composition. D'après le théorème des bornes atteintes, elle admet donc un maximum sur la partie fermée bornée S de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b. En supposant $\sigma(A) \neq \emptyset$, il existe une valeur propre réelle λ de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$, soit U un vecteur propre unitaire associé à cette valeur propre. Alors $U \in S$ et $AU = \lambda U$, puis $U^\top AU = \lambda\, U^\top U = \lambda$ et $|U^\top AU| = \rho(A)$, donc $\rho(A) \leq \max\limits_{X \in S} |X^\top AX|$.