ESPACES VECTORIELS NORMÉS

I. Normes et distances.

1. Notion de norme.

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle **norme** sur E toute application N de E vers $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois axiomes suivants:

(N1): $\forall x \in E \qquad N(x) = 0 \iff x = 0_E$;

(N2): $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$;

(N3): $\forall (x,y) \in E^2 \qquad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Ces trois axiomes **(N1)**, **(N2)**, **(N3)** s'appellent respectivement **axiome de séparation**, **axiome d'homogénéité** et **inégalité triangulaire.**

De l'inégalité triangulaire **(N3)** permettant de **majorer** la norme d'une somme de vecteurs, on déduit une autre inégalité permettant cette fois-ci de **minorer** $N(x+y)$. C'est le **"côté obscûûr"** de l'inégalité triangulaire (*appellation non contrôlée!*):

Proposition. Si N est une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on a alors

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad \big|N(x) - N(y)\big| \leq N(x+y)\ .$$

Preuve. En effet, en appliquant **(N3)** *aux vecteurs $x+y$ et $-y$, on obtient*

$$N(x) = N\big((x+y) + (-y)\big) \leq N(x+y) + N(-y)\ .$$

Mais, par homogénéité **(N2)**, *on a* $N(-y) = N\big((-1)y\big) = |-1|\, N(y) = N(y)$. *On a donc obtenu* $N(x) \leq N(x+y) + N(y)$, *soit* $N(x) - N(y) \leq N(x+y)$.

En échangeant les rôles de x et y, on a aussi $N(y) - N(x) \leq N(x+y)$.

On conclut que $\big|N(x) - N(y)\big| \leq N(x+y)$.

Définition. Un espace vectoriel E muni d'une norme N sera qualifié d'**espace vectoriel normé** (en abrégé EVN), et il sera présenté sous la forme d'un couple (E, N).

Remarque. Il est peu courant d'utiliser une lettre comme N pour représenter une norme, la notation $\|x\|$ est plus couramment utilisée pour représenter la norme d'un vecteur x, on parlera alors de la norme $\|\cdot\|$.

Définition. Un vecteur x de l'EVN $\big(E, \|\cdot\|\big)$ est dit **unitaire** si $\|x\| = 1$.

Remarque. Si x est un vecteur non nul de E, le vecteur $u = \dfrac{x}{\|x\|}$ est unitaire (*conséquence de la propriété d'homogénéité*), on l'appelle vecteur unitaire associé à x.

Exemple. Les normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$. Si $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|\ , \quad \|x\|_2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\ , \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k|\ .$$

Alors $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$.

Preuve. • *Montrons-le pour $\|\cdot\|_1$: on a bien $\|x\|_1 \in \mathbb{R}_+$ pour tout vecteur $x = (x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$. Une somme de réels positifs étant nulle si et seulement si chaque terme est nul, il est immédiat que $\|x\|_1 = 0$ si et seulement si $x = 0$, d'où l'axiome de séparation. L'homogénéité $\|\lambda x\|_1 = |\lambda|\, \|x\|_1$ est immédiate. Enfin, si $y = (y_1, \cdots, y_n)$,*

$$\|x+y\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^{n} \big(|x_k| + |y_k|\big) = \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1\ .$$

• *Montrons-le pour $\|\cdot\|_\infty$: on a bien $\|x\|_\infty \in \mathbb{R}_+$ pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Le maximum d'une famille de réels positifs est nul si et seulement si tous sont nuls, d'où l'axiome de séparation. Il est clair que*

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} \big(|\lambda|\,|x_k|\big) = |\lambda| \max_{1\le k\le n} |x_k| = |\lambda|\,\|x\|_\infty .$$

Enfin,

$$\|x+y\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |x_k+y_k| \le \max_{1\le k\le n} \big(|x_k|+|y_k|\big) \le \max_{1\le k\le n} |x_k| + \max_{1\le k\le n} |y_k| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty .$$

Les normes $\|\cdot\|_2$, que l'on nomme **norme euclidienne canonique** sur $\mathbb{R}^n$, ou bien **norme hermitienne canonique** sur $\mathbb{C}^n$ seront étudiées dans le paragraphe suivant.

Remarque. Pour la démonstration de l'homogénéité de la norme $\|\cdot\|_\infty$ ci-dessus, ainsi que dans l'exemple qui va suivre, on utilise le résultat facile suivant: **si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et si $k \in \mathbb{R}_+$, alors** $\sup(kA) = k\ \sup(A)$**.** On a noté bien sûr $kA = \{ka\ ;\ a \in A\}$. On pourra utiliser cela sans démonstration.

Exemples de normes sur des espaces de fonctions.

• Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $E = \mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions bornées de I vers $\mathbb{K}$. Pour $f \in E$, posons $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} \big|f(x)\big|$. On définit ainsi une norme sur E, nommée **norme de la convergence uniforme**, et j'espère que vous comprenez pourquoi! *L'axiome de séparation est immédiat, l'homogénéité résulte de la remarque ci-dessus et, si $f \in E$ et $g \in E$, alors pour tout $x \in I$, on a $\big|f(x)+g(x)\big| \le \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, d'où l'on déduit l'inégalité triangulaire $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.*

• Soit $S = [a,b]$ un segment, soit $E = \mathcal{C}(S,\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions continues de S vers $\mathbb{K}$. Pour $f \in E$, posons $\|f\|_1 = \displaystyle\int_S |f| = \int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$. On définit ainsi une norme sur E, nommée **norme de la convergence en moyenne**. *L'axiome de séparation résulte du "théorème de stricte positivité" des intégrales, l'homogénéité est immédiate, et*

$$\|f+g\|_1 = \int_S |f+g| \le \int_S \big(|f|+|g|\big) = \int_S |f| + \int_S |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1 ,$$

par croissance et linéarité.

• On peut aussi définir une norme $\|\cdot\|_1$ sur l'espace $L^1_c(I,\mathbb{K})$ des fonctions continues et intégrables sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, par $\|f\|_1 = \displaystyle\int_I |f|$.

• D'autres normes, notées $\|\cdot\|_2$, seront présentées dans le paragraphe suivant.

2. Distance associée à une norme, boules.

Définition. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle **distance** associée à cette norme l'application $d : E^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad d(x,y) = \|y-x\| .$$

Proposition. On a alors les propriétés suivantes:

axiome de séparation: $\quad \forall (x,y) \in E^2 \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$;

symétrie: $\quad \forall (x,y) \in E^2 \quad d(y,x) = d(x,y)$;

inégalité triangulaire: $\quad \forall (x,y,z) \in E^3 \quad d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$.

Ces propriétés résultent immédiatement des axiomes de définition d'une norme.

Définition. Soit $a \in E$, où $\big(E, \|\cdot\|\big)$ est un espace vectoriel normé, soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On définit la **boule ouverte de centre** a **et de rayon** r par

$$B(a,r) = \big\{x \in E \mid \|x-a\| < r\big\} = \big\{x \in E \mid d(a,x) < r\big\}\ ,$$

la **boule fermée de centre** a **et de rayon** r par

$$\overline{B}(a,r) = \big\{x \in E \mid \|x-a\| \leq r\big\} = \big\{x \in E \mid d(a,x) \leq r\big\}\ ,$$

la **sphère de centre** a **et de rayon** r par

$$S(a,r) = \big\{x \in E \mid \|x-a\| = r\big\} = \big\{x \in E \mid d(a,x) = r\big\}\ .$$

Définition. Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que A est **convexe** si on a:

$$\forall (x,y) \in A^2 \quad \forall t \in [0,1] \qquad (1-t)x + ty \in A\ .$$

Commentaires. Si x et y sont deux "points" de E, le **segment** $[x,y]$ est l'ensemble

$$S = [x,y] = \big\{(1-t)x + ty\ ;\ t \in [0,1]\big\}\ .$$

Ce segment est l'ensemble des **barycentres** à coefficients positifs des points x et y (*et c'est bien dommage que cette notion de barycentre ait disparu des programmes de mathématiques!*) On peut envisager aussi une interprétation cinématique: si un point mobile décrit un **mouvement rectiligne uniforme**, s'il se trouve au point x à l'instant $t = 0$ et au point y à l'instant $t = 1$, alors à un instant t quelconque avec $t \in [0,1]$, il se trouvera au point $z = x + t(y-x) = (1-t)x + ty$.

Une partie A de E est donc convexe si et seulement si

$$\forall (x,y) \in A^2 \qquad [x,y] \subset A\ .$$

Notons que cette notion ne fait pas intervenir de norme, c'est juste une "notion affine".

Proposition. Dans un espace vectoriel normé, toute boule est convexe.

Preuve. Soit $a \in E$, soit $r > 0$, considérons la boule fermée $B = \overline{B}(a,r)$. Si x et y sont deux éléments de B, alors $\|x-a\| \leq r$, $\|y-a\| \leq r$, puis pour tout $t \in [0,1]$, par homogénéité de la norme et inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\big\|(1-t)x + ty - a\big\| &= \big\|(1-t)(x-a) + t(y-a)\big\| \\ &\leq (1-t)\,\|x-a\| + t\,\|y-a\| \\ &\leq (1-t)\,r + t\,r \ =\ r\ ,\end{aligned}$$

donc $(1-t)x + ty \in B$, on a donc prouvé que le segment $[x,y]$ est inclus dans B. La preuve est analogue dans le cas d'une boule ouverte.

Définition. Dans un e.v.n. $\big(E, \|\cdot\|\big)$, une partie A est dite **bornée** si

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in A \qquad \|x\| \leq M\ .$$

Remarque. Une partie A de E est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule.

De la même façon, une suite (x_n) d'éléments de E est dite bornée si

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \|x_n\| \leq M \ .$$

Une fonction $f : X \to E$ (où X est un ensemble quelconque) est dite bornée si

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in X \qquad \big\|f(x)\big\| \leq M \ .$$

3. <u>Norme associée à un produit scalaire.</u>

On rappelle qu'un **produit scalaire** sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une **forme bilinéaire symétrique définie positive** sur E, i.e. une application $f : E \times E \to \mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacune des deux variables, et telle que

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad f(y,x) = f(x,y) \qquad \text{(symétrie)}$$

$$\forall x \in E \qquad f(x,x) \geq 0 \qquad \text{(caractère "positif")}$$

$$\forall x \in E \qquad f(x,x) = 0 \iff x = 0_E \ . \qquad \text{(caractère "défini")}$$

Il est d'usage de noter le produit scalaire de deux vecteurs x et y sous l'une des formes $(x|y)$ ou $< x, y >$ ou encore $x \cdot y$, plutôt que $f(x,y)$.

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien réel**, ou encore **espace euclidien** si de plus il est de dimension finie.

Rappelons l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**: **Si** $(\cdot|\cdot)$ **est un produit scalaire sur un** $\mathbb{R}$**-espace vectoriel** E**, on a alors**

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad (x|y)^2 \leq (x|x)\,(y|y) \ ,$$

avec égalité si et seulement si les vecteurs x **et** y **sont colinéaires.**

Preuve. Si $y = 0_E$, alors il résulte de la bilinéarité que $(x|y)$ et $(y|y)$ sont nuls, d'où l'égalité entre $(x|y)^2$ et $(x|x)\,(y|y)$.

Si $y \neq 0_E$, alors $(y|y) \neq 0$ (caractère "défini" du produit scalaire) et, par le caractère positif, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad (x + \lambda y | x + \lambda y) \geq 0 \ .$$

En utilisant la bilinéarité, on développe:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad (y|y)\,\lambda^2 + 2\,(x|y)\,\lambda + (x|x) \geq 0 \ .$$

Le premier membre est un trinôme en λ qui est toujours positif, son discriminant est donc négatif ou nul (il ne peut avoir deux racines distinctes), donc $\Delta = 4(x|y)^2 - 4(x|x)(y|y) \leq 0$, ce qui donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Il y a égalité:

- lorsque $y = 0_E$;

- lorsque $y \neq 0_E$ et $\Delta = 0$, mais la nullité du discriminant signifie exactement que le trinôme considéré admet une racine réelle (alors double), donc cela équivaut à l'existence d'un réel λ_0 tel que $(x + \lambda_0 y | x + \lambda_0 y) = 0$, soit tel que $x = -\lambda_0 y$ (caractère défini du produit scalaire).

Finalement, l'égalité a lieu si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.

De cela, on déduit que:

<u>Proposition.</u> Si $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on définit une norme sur E, dite "associée à ce produit scalaire", en posant

$$\forall x \in E \qquad \|x\| = \sqrt{(x|x)}\ .$$

Preuve. Déjà, $\|x\|$ est bien défini puisque $(x|x) \geq 0$ par le caractère positif du produit scalaire, et on a $\|x\| \geq 0$ pour tout $x \in E$. L'axiome de séparation de la norme est une conséquence immédiate du caractère défini du produit scalaire:

$$\forall x \in E \qquad \|x\| = 0 \iff (x|x) = 0 \iff x = 0_E\ .$$

Si $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2\,(x|x)} = \sqrt{\lambda^2}\,\sqrt{(x|x)} = |\lambda|\,\|x\|\ ,$$

on a donc l'homogénéité. Enfin, si $(x,y) \in E^2$,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= (x+y|x+y) \;=\; \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,(x|y) \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\big|(x|y)\big| \\
&\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\
&= \big(\|x\| + \|y\|\big)^2\ .
\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé l'inégalité triangulaire.

Les normes associées à un produit scalaire sont souvent notées avec un indice 2. L'**inégalité de Cauchy-Schwarz** peut alors se réécrire, dans un espace préhilbertien:

$$\forall x \in E \qquad \big|(x|y)\big| \leq \|x\|_2\,\|y\|_2\ .$$

<u>Exemple.</u> Sur $\mathbb{R}^n$, le **produit scalaire canonique** est défini par $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ si $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$. Notons que l'on peut écrire

$$(x|y) = X^\top Y$$

si l'on dispose les coordonnées des vecteurs x et y sous la forme de matrices-colonnes, alors notées X et Y. La norme associée est la **norme euclidienne canonique** $\|\cdot\|_2$ définie par

$$\|x\|_2 = \sqrt{X^\top X} = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\ .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit alors

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}\ ,$$

avec égalité *si et seulement si* les vecteurs $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$ sont colinéaires.

Exemple. Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\operatorname{tr}(A^\top B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j} = \sum_{i,j} a_{i,j}b_{i,j}$$

(*vérification laissée au lecteur*). Cette deuxième expression sous forme de somme double permet de montrer facilement que l'on définit ainsi un produit scalaire, dit **produit scalaire canonique**, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en posant

$$(A|B) = \operatorname{tr}(A^\top B) = \sum_{i,j} a_{i,j}b_{i,j}\ .$$

La norme associée $\|\cdot\|_2$ est donc définie par

$$\forall A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\operatorname{tr}(A^\top A)} = \Big(\sum_{i,j} a_{i,j}^2\Big)^{\frac{1}{2}}\ .$$

Exemple. Soit $S = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathcal{C}(S,\mathbb{R})$, ou $\mathcal{C}^0(S,\mathbb{R})$, on définit un produit scalaire en posant

$$\forall (f,g) \in E^2 \qquad (f|g) = \int_S fg = \int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

La norme associée, dite **norme de la convergence en moyenne quadratique**, est définie par

$$\forall f \in E \qquad \|f\|_2 = \sqrt{(f|f)} = \sqrt{\int_S f^2} = \Big(\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}\ .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit alors

$$\Big|\int_S fg\Big| \le \Big(\int_S f^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_S g^2\Big)^{\frac{1}{2}}\ ,$$

avec égalité *si et seulement si* les fonctions f et g sont colinéaires.

Exemple (HP). De façon analogue, si I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = L_c^2(I,\mathbb{R})$ des fonctions continues et de carré intégrable sur I, on définit un produit scalaire en posant (si I a pour bornes a et b avec $-\infty \le a < b \le +\infty$)

$$\forall (f,g) \in E^2 \qquad (f|g) = \int_I fg = \int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

La norme associée, dite **norme de la convergence en moyenne quadratique**, est définie par

$$\forall f \in E \qquad \|f\|_2 = \sqrt{(f|f)} = \sqrt{\int_I f^2} = \Big(\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}}\ .$$

Exercice. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t\ .$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

Proposition. **Sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, on définit une norme, dite norme hermitienne canonique, en posant, pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$,**

$$\|x\|_2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} .$$

Preuve. Les axiomes de séparation et d'homogénéité sont immédiats à prouver. Pour l'inégalité triangulaire, soient $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, introduisons alors $u = \big(|x_1|, \cdots, |x_n|\big) \in \mathbb{R}^n$ et $v = \big(|y_1|, \cdots, |y_n|\big) \in \mathbb{R}^n$. La "norme euclidienne canonique" $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$ étant bien une norme d'après ce qui précède, on a $\|u+v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$. Mais d'autre part $\|u\|_2 = \|x\|_2$ et $\|v\|_2 = \|y\|_2$, et

$$\|x+y\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} \big|x_k + y_k\big|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \big(|x_k| + |y_k|\big)^2 = \sum_{k=1}^{n} (u_k + v_k)^2 = \|u+v\|_2^2 ,$$

donc

$$\|x+y\|_2 \leq \|u+v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2 .$$

II. Suites convergentes dans un e.v.n.

Définition. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé $\big(E, \|\cdot\|\big)$. On dit que cette suite est **convergente dans l'e.v.n.** $\big(E, \|\cdot\|\big)$ s'il existe un vecteur l de E tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n - l\| = 0$. Sinon, on dit qu'elle est **divergente**.

Propriété (unicité de la limite). **Le vecteur l mentionné dans la définition ci-dessus, s'il existe, est unique.**

Preuve. Supposons $\lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n - l\| = \lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n - l'\| = 0$ avec $l \in E$, $l' \in E$. Pour tout n, on a alors, par l'inégalité triangulaire,

$$\|l' - l\| = \big\|(l' - u_n) + (u_n - l)\big\| \leq \|u_n - l\| + \|u_n - l'\| .$$

En passant à la limite, on obtient $\|l' - l\| \leq 0$, soit $\|l' - l\| = 0$, soit $l = l'$ par l'axiome de séparation de la norme.

La limite d'une suite (**si elle existe!**) étant unique, lorsque $\lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n - l\| = 0$, on dira que la suite (u_n) **admet pour limite** l dans l'espace vectoriel normé $\big(E, \|\cdot\|\big)$, on notera alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ dans $\big(E, \|\cdot\|\big)$.

Remarque. La convergence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel E et la valeur de sa limite dépendent a priori de la norme choisie sur E (*nous reviendrons sur ce point dans le paragraphe suivant*). Considérons par exemple $E = \mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$. Pour tout n entier naturel, soit $f_n \in E$ défini par $\forall x \in [0,1] \quad f_n(x) = x^n$. Si on munit E de la norme de la convergence en moyenne $\|\cdot\|_1$ (*cf.* paragraphe **I.1.**), alors

$$\|f_n - 0\|_1 = \|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 ,$$

la suite (f_n) converge donc en moyenne (i.e. pour la norme $\|\cdot\|_1$) vers la fonction nulle. Mais, si on munit E de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$, alors $\|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\|_\infty = 1$

ne tend pas vers 0, donc la suite (f_n) ne converge pas uniformément (i.e. pour la norme $\|\cdot\|_\infty$) vers la fonction nulle.

<u>Propriété (opérations sur les limites).</u> Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans un e.v.n. $\big(E, \|\cdot\|\big)$, soit λ un scalaire, soient l et l' deux vecteurs de E. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda l + l'$.

Preuve. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\big\|(\lambda u_n + v_n) - (\lambda l + l')\big\| = \big\|\lambda(u_n - l) + (v_n - l')\big\| \le |\lambda|\, \|u_n - l\| + \|v_n - l'\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ ,$$

les opérations algébriques sur les suites à valeurs réelles étant supposées connues.

<u>Proposition.</u> Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.

Preuve. Soit (u_n) convergente de limite l dans $\big(E, \|\cdot\|\big)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - l\| = 0$, il existe un rang N à partir duquel $\|u_n - l\| \le 1$, ce qui entraîne $\|u_n\| \le 1 + \|l\|$ pour $n \ge N$. On a donc, pour tout n entier naturel, $\|u_n\| \le M$, en posant

$$M = \max\big\{\|u_0\|, \|u_1\|, \cdots, \|u_{N-1}\|, 1 + \|l\|\big\}\ .$$

L'exemple classique de la suite $\big((-1)^n\big)$ dans $\mathbb{R}$ montre que la réciproque est fausse.

<u>Définition.</u> Une suite (v_n) est dite **extraite** d'une suite (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{\varphi(n)}$.

Par exemple, les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}), ou encore (u_{n^2}) sont extraites de la suite (u_n).

<u>Proposition.</u> Si une suite (u_n) converge vers l dans un e.v.n. $\big(E, \|\cdot\|\big)$, alors toute suite extraite de (u_n) admet aussi pour limite l.

Preuve. Soit (u_n) une suite à valeurs dans un e.v.n. $\big(E, \|\cdot\|\big)$, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ dans $\big(E, \|\cdot\|\big)$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - l\| = 0$. Soit (v_n) une suite extraite de (u_n), alors $v_n = u_{\varphi(n)}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Par une récurrence facile, on montre que $\varphi(n) \ge n$ pour tout n entier naturel. Si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe un rang N à partir duquel $\|u_n - l\| \le \varepsilon$. Pour $n \ge N$, on a, a fortiori, $\varphi(n) \ge N$, donc $\|v_n - l\| = \|u_{\varphi(n)} - l\| \le \varepsilon$. Cela prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|v_n - l\| = 0$, autrement dit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ dans $\big(E, \|\cdot\|\big)$.

III. <u>Comparaison des normes.</u>

1. <u>Normes équivalentes.</u>

<u>Définition.</u> Soient N et N' deux normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que N' est **équivalente** à N s'il existe deux constantes C_1 et C_2 strictement positives telles que

$$\forall x \in E \qquad C_1\, N(x) \le N'(x) \le C_2\, N(x) \qquad \textbf{(*)}\ .$$

Cette relation est alors une "relation d'équivalence" (HP) dans l'ensemble des normes sur E. Elle est en effet:

- réflexive puisque $1\, N(x) \le N(x) \le 1\, N(x)$, i.e. on prend $C_1 = C_2 = 1$;

- symétrique puisque, de **(*)**, on déduit $\forall x \in E \quad \dfrac{1}{C_2}\, N'(x) \le N(x) \le \dfrac{1}{C_1}\, N'(x)$;

- transitive puisque, si on a **(*)** et **(**)**: $\forall x \in E \quad C_1'\, N'(x) \leq N''(x) \leq C_2'\, N'(x)$, alors

$$\forall x \in E \qquad C_1 C_1'\, N(x) \leq N''(x) \leq C_2 C_2'\, N(x) \ ,$$

i.e. N'' est équivalente à N.

<u>Proposition.</u> Si deux normes N et N' sur un même espace vectoriel E sont équivalentes, alors:

- une suite d'éléments de E est bornée dans (E, N) si et seulement si elle est bornée dans (E, N') ;

- une suite d'éléments de E est convergente dans (E, N) si et seulement si elle est convergente dans (E, N'), et dans ce cas avec la même limite.

Preuve. Par hypothèse, il existe deux constantes C_1 et C_2 strictement positives telles que

$$\forall x \in E \qquad C_1\, N(x) \leq N'(x) \leq C_2\, N(x) \qquad \textbf{(*)}\ .$$

Soit $u = (u_n)$ une suite à valeurs dans E.

• *Si u est bornée pour la norme N, il existe un réel positif M tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad N(u_n) \leq M$. On déduit alors de* **(*)** *que $\forall n \in \mathbb{N} \quad N'(u_n) \leq C_2\, M$, donc la suite u est aussi bornée pour la norme N'. La réciproque se traite de la même façon.*

• *Si u est convergente dans (E, N), avec pour limite $l \in E$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} N(u_n - l) = 0$. De* **(*)**, *on déduit que $N'(u_n - l) \leq C_2\, N(u_n - l)$. Par majoration, on a donc aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} N'(u_n - l) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ dans (E, N'). La réciproque se traite de la même façon.*

<u>Remarque.</u> Bien sûr, si N et N' sont deux normes équivalentes sur E, alors les parties bornées sont les mêmes dans les espaces vectoriels normés (E, N) et (E, N').

<u>Exemple de deux normes non équivalentes.</u> Dans l'espace $E = \mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$, reprenons les deux normes usuelles $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ déjà mentionnées dans une remarque du paragraphe précédent. Si l'on considère la suite (f_n) d'éléments de E définie par $f_n(x) = x^n$, on a $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n+1}$ et $\|f_n\|_\infty = 1$. On constate que le rapport $\dfrac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = n+1$ n'est pas borné. Il n'existe donc pas de constante strictement positive $C > 0$ telle que, pour tout $f \in E$, on ait $\|f\|_\infty \leq C\, \|f\|_1$, les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur E ne sont donc pas équivalentes.

2. <u>Cas de la dimension finie.</u>

<u>Exemple.</u> Les trois normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ sont deux à deux équivalentes. En effet, rappelons que, si $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \ , \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ , \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k| \ .$$

• Il est clair que $\forall x \in \mathbb{K}^n \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$, ce qui donne directement l'équivalence des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

• On a $\|x\|_1^2 = \left(\sum\limits_{k=1}^n |x_k|\right)^2 = \sum\limits_{k=1}^n |x_k|^2 + 2\sum\limits_{k<l} |x_k|\ |x_l| \ \geq \ \sum\limits_{k=1}^n |x_k|^2 = \|x\|_2^2$, d'où l'inégalité $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$. Par ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, appliquée aux vecteurs

$u = \big(|x_1|, \cdots, |x_n|\big)$ et $v = (1, \cdots, 1)$ dans $\mathbb{R}^n$ (muni de son produit scalaire canonique) s'écrit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k| \times 1 \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=1}^{n} 1^2\Big)^{\frac{1}{2}}$, soit $\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$. L'encadrement

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \qquad \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_2$$

montre l'équivalence des normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{K}^n$.

• L'équivalence des normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ peut se déduire de ce qui précède par transitivité, mais continuons plutôt à manipuler des inégalités, c'est rigolo! On a très rapidement

$$\forall x \in \mathbb{K}^n \qquad \|x\|_\infty^2 \leq \|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \leq n\,\|x\|_\infty^2\ ,$$

donc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$.

Nous avons en fait un résultat plus général:

Théorème (admis). Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Conséquence. Dans un espace vectoriel de dimension finie, la convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas du choix de la norme.

Commentaire. Il est ainsi légitime de parler de la convergence d'une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ou bien de la limite d'une suite de matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, sans préciser quelle est la norme choisie pour réaliser cette étude. En fait, nous allons montrer que l'on peut toujours se ramener à travailler sur les coordonnées des vecteurs dans une base.

Proposition. Dans un espace vectoriel de dimension finie, l'étude de la convergence d'une suite se ramène à celle de ses coordonnées dans une base.

Explication de texte. Cela signifie que, si E est un espace vectoriel de dimension n, si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E et si $l \in E$, alors la suite (x_k) admet pour limite l si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la i-ème coordonnée $x_k^{(i)}$ du vecteur x_k tend, lorsque k tend vers l'infini, vers la i-ème coordonnée $l^{(i)}$ du vecteur l.

Preuve. Reprenons les notations introduites ci-dessus, posons donc $x_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_k^{(i)} e_i$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *puis* $l = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} l^{(i)} e_i$. *Nous allons donc prouver l'équivalence*

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = l \iff \Big(\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \lim_{k\to+\infty} x_k^{(i)} = l^{(i)}\Big)\ .$$

Puisque toutes les normes sur E sont équivalentes, choisissons de travailler avec la norme $\|\cdot\|_1$ *définie par* $\|y\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big|y^{(i)}\big|$ *si* $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y^{(i)} e_i$.

• *Si* $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} x_k = l$ *dans E, alors par définition* $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \|x_k - l\|_1 = 0$. *Comme, pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, *on a*

$$0 \leq \left|x_k^{(i)} - l^{(i)}\right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left|x_k^{(j)} - l^{(j)}\right| = \|x_k - l\|_1 \ ,$$

on déduit par majoration que $\lim_{k\to+\infty} \left|x_k^{(i)} - l^{(i)}\right| = 0$*, soit* $\lim_{k\to+\infty} x_k^{(i)} = l^{(i)}$ *dans* $\mathbb{K}$.

- *Si, pour tout* $i \in [\![1, n]\!]$, $\lim_{k\to+\infty} x_k^{(i)} = l^{(i)}$ *dans* $\mathbb{K}$*, alors* $\lim_{k\to+\infty} \left|x_k^{(i)} - l^{(i)}\right| = 0$ *pour tout* i*,*

et par opérations (somme) sur les suites convergentes, on a $\lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \left|x_k^{(i)} - l^{(i)}\right|\right) = 0$*,*

soit $\lim_{k\to+\infty} \|x_k - l\|_1 = 0$*, donc* $\lim_{k\to+\infty} x_k = l$ *dans* E.

<u>Exemples.</u> Ainsi, dans $\mathbb{K}^3$ ou $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})$, $\lim_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} x_n = a \\ \lim_{n\to+\infty} y_n = b \\ \lim_{n\to+\infty} z_n = c \end{cases}$.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si (A_k) est une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous noterons $A_k = \left(a_{i,j}^{(k)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$, si $L = (l_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\lim_{k\to+\infty} A_k = L \iff \left(\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad \lim_{k\to+\infty} a_{i,j}^{(k)} = l_{i,j}\right) .$$

On étudie donc la convergence d'une suite de matrices coefficient par coefficient.

IV. <u>Un peu de topologie, youpi!</u>

1. <u>Points intérieurs, parties ouvertes.</u>

<u>Définition 1.a.</u> Soit A une partie d'un e.v.n. $\left(E, \|\cdot\|\right)$, soit $x \in E$. On dit que x est un **point intérieur** à A s'il existe une boule de centre x incluse dans A, i.e. si $\exists r > 0 \quad B(x,r) \subset A$.

<u>Remarque.</u> La boule considérée dans cette définition peut être choisie ouverte ou fermée, cela n'a pas d'importance puisque, si pour un certain $r > 0$, on a $\overline{B}(x,r) \subset A$, alors a fortiori $B(x,r) \subset A$, et inversement, si $B(x,r) \subset A$, alors $\overline{B}\left(x, \dfrac{r}{2}\right) \subset A$.

On notera aussi que, si N et N' sont deux normes équivalentes sur un même espace vectoriel E, et si A est un partie de E, les points intérieurs à A sont les mêmes dans les espaces vectoriels normés (E, N) et (E, N'). Dans un espace vectoriel de dimension finie, cette notion ne dépend donc pas de la norme choisie puisqu'elles sont toutes équivalentes.

<u>Définition 1.b. (HP)</u> Soit A une partie d'un e.v.n. E. On appelle **intérieur** de A, et on note $\overset{\circ}{A}$, l'ensemble des points de E intérieurs à A.

<u>Remarque.</u> Comme, pour tout $r > 0$, on a $x \in B(x,r)$, il est clair que tout point intérieur à A est élément de A. On a donc, dans tous les cas, l'inclusion $\overset{\circ}{A} \subset A$.

<u>Exemple.</u> Dans $\mathbb{R}$, les intervalles $]0,1[$, $]0,1]$, $[0,1[$ et $[0,1]$ ont tous pour intérieur $]0,1[$. Remarquons que, dans $\mathbb{R}$, la "boule ouverte" de centre x et de rayon r est simplement l'intervalle ouvert $]x-r, x+r[$.

<u>Exemple.</u> Dans un e.v.n. quelconque, une partie finie est toujours d'intérieur vide.

Exercice IV.1.1.. Montrer que l'intérieur de la boule fermée $\overline{B}(a,r)$ est la boule ouverte $B(a,r)$. $\square$

Exercice IV.1.2. Montrer que la sphère $S(a,r)$ est d'intérieur vide. $\square$

Définition 1.c. Une partie A d'un e.v.n. $\big(E, \|\cdot\|\big)$ est dite **ouverte** si tout point de A est intérieur à A, i.e. si on a l'inclusion $A \subset \overset{\circ}{A}$. On dit aussi dans ce cas que A est "**un ouvert**". Si A est une partie de E, on a finalement l'équivalence:

$$\boxed{A \text{ est ouvert} \quad \Longleftrightarrow \quad \overset{\circ}{A} = A.}$$

Exemple. Les intervalles "ouverts" de $\mathbb{R}$ sont:
- l'ensemble vide $\emptyset$;
- la droite réelle tout entière $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$;
- les demi-droites ouvertes $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$;
- les intervalles ouverts bornés $]a, b[$ avec a et b réels, $a < b$.

Proposition. Dans un e.v.n. E, toute boule ouverte est un ouvert.

Preuve. Soit en effet $A = B(a,r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r, avec $a \in E$ et $r > 0$. Soit $x \in A$, posons $d = d(a,x) = \|x - a\|$. On a alors $0 \leq d < r$. Je prétends que la boule ouverte U de centre x et de rayon $r - d$ est incluse dans A, ce qui prouvera que x est intérieur à A. En effet, si $y \in U$, alors $\|y - x\| < r - d$ puis, par inégalité triangulaire,

$$\|y - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < (r - d) + d = r \ ,$$

donc $y \in A$. Faire un dessin!

2. Points adhérents, parties fermées.

Définition 2.a. Soit A une partie d'un e.v.n. $\big(E, \|\cdot\|\big)$, soit $x \in E$. On dit que x est un **point adhérent** à A si toute boule de centre x rencontre A, i.e. si $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

Remarque. Comme dans le paragraphe précédent, on ne modifie rien à cette définition en remplaçant les boules ouvertes par des boules fermées. De plus, le fait de remplacer une norme N par une norme équivalente N' ne modifie pas non plus les points adhérents. Cette notion a donc un sens dans un espace vectoriel de dimension finie, sans qu'il soit besoin de préciser quelle est la norme choisie.

Définition 2.b. Soit A une partie d'un e.v.n. E. On appelle **adhérence** de A, et on note $\overline{A}$, l'ensemble des points de E adhérents à A.

Remarque. Si $x \in A$, pour tout $r > 0$, l'intersection $B(x,r) \cap A$ est non vide puisqu'elle contient au moins le point x, donc $x \in \overline{A}$. On a donc, dans tous les cas, l'inclusion $A \subset \overline{A}$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}$, les intervalles $]0,1[$, $]0,1]$, $[0,1[$ et $[0,1]$ ont tous pour adhérence $[0,1]$.

<u>Définition 2.c.</u> Une partie A d'un e.v.n. E est dite **dense** dans E si on a $\overline{A} = E$.

<u>Exemple.</u> Dans $\mathbb{R}$ toujours, tout réel est adhérent à l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (*en effet, si $x \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, l'intervalle $]x-r, x+r[$ contient toujours au moins un rationnel, il en contient même une infinité*), donc $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. On dit que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$.

<u>Définition 2.d.</u> Une partie A d'un e.v.n. E est dite **fermée** si tout point adhérent à A est élément de A, i.e. si on a l'inclusion $\overline{A} \subset A$. On dit aussi alors que A est "**un fermé**".

Si A est une partie de E, on a finalement l'équivalence:

$$\boxed{A \text{ est fermé} \iff \overline{A} = A.}$$

<u>Exemple.</u> Les intervalles "fermés" de $\mathbb{R}$ sont:
- l'ensemble vide $\emptyset$;
- la droite réelle tout entière $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$;
- les demi-droites fermées $]-\infty, a]$ ou $[a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$;
- les segments $[a, b]$ avec a et b réels, $a \leq b$ (en particulier les singletons $\{a\} = [a, a]$).

Il existe un moyen efficace de caractériser les points adhérents et les parties fermées, en utilisant des suites.

<u>Proposition (caractérisation séquentielle des points adhérents).</u> Soit A une partie d'un e.v.n. E, soit $x \in E$. Alors x est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite de points de A qui converge vers x.

Les points adhérents à A sont donc ceux que l'on peut écrire comme limites d'une suite d'éléments de A.

Preuve. • *Supposons qu'il existe une suite (a_n) d'élements de A convergeant vers x, ainsi $\lim_{n \to +\infty} \|a_n - x\| = 0$. Si on se donne $r > 0$, d'après la définition de la limite, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $\|a_n - x\| < r$. En particulier, $\|a_N - x\| < r$, donc a_N est élément de $B(x, r)$ et aussi de A, donc $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Ceci étant vrai pour tout $r > 0$, on a montré que x est adhérent à A.*

• *Supposons x adhérent à A, alors pour tout n entier naturel non nul, la boule $B\Big(x, \dfrac{1}{n}\Big)$ rencontre A, il existe donc au moins un point a_n appartenant à l'intersection $B\Big(x, \dfrac{1}{n}\Big) \cap A$. On prouve ainsi l'existence d'une suite (a_n) d'éléments de A tels que $\|a_n - x\| < \dfrac{1}{n}$ pour tout n, ce qui prouve que $\lim_{n \to +\infty} a_n = x$.*

<u>Exercice IV.2.1..</u> Montrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$ est la boule fermée $\overline{B}(a, r)$... d'où une certaine cohérence des notations: $\overline{B(a, r)} = \overline{B}(a, r)$. $\square$

<u>Proposition (caractérisation séquentielle des parties fermées).</u> Une partie A d'un e.v.n. E est fermée si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A a sa limite dans A.

$$\boxed{\text{Les parties fermées sont donc les parties "\textbf{stables par passage à la limite}".}}$$

Preuve. • *Supposons A fermée. Si (a_n) est une suite d'éléments de A admettant pour limite x, on sait que $x \in \overline{A}$ d'après la caractérisation précédente. Mais, A étant fermée, $\overline{A} = A$, donc $x \in A$. On a donc prouvé que A est stable par passage à la limite.*

• *Montrons la réciproque par contraposition. Si A n'est pas fermée, alors $\overline{A} \neq A$, il existe donc un point x adhérent à A et non élément de A. On en déduit qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x (n'appartenant pas à A), donc A n'est pas stable par passage à la limite.*

Exemple. La partie $A =]0, 1]$ de $\mathbb{R}$ n'est pas fermée, parce qu'il existe des suites d'éléments de A, convergentes, ayant pour limite le réel 0 qui n'appartient pas à A, par exemple la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$. Donc A n'est pas "stable par passage à la limite".

Conséquence. Une partie A d'un e.v.n. E est dense dans E si et seulement si tout élément de E peut s'écrire comme limite d'une suite d'éléments de A.

Par exemple, l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est dense dans $\mathbb{R}$ puisque, si x est un réel quelconque, la suite (x_n) définie par $x_n = 10^{-n} \lfloor 10^n x \rfloor$ est une suite de nombres décimaux qui tend vers x, *ce sont les valeurs approchées décimales à 10^{-n} près par défaut du réel x.*

Un autre exemple à connaître est celui de l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles qui est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ puisque, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice quelconque, on a $A = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(A + \dfrac{1}{k} I_n\right)$, les matrices $A + \dfrac{1}{k} I_n$ étant inversibles pour k assez grand car A n'a qu'un nombre fini de valeurs propres.

Proposition. Dans un e.v.n. E, toute boule fermée, de même que toute sphère, est un fermé.

Preuve. Prouvons cela par caractérisation séquentielle.

Soit $B = \overline{B}(a, r)$ une boule fermée, soit (x_n) une suite d'éléments de B, supposée convergente, de limite x. On a $\|x_n - a\| \leq r$ pour tout n puisque $x_n \in B$. Par ailleurs, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$, i.e. $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n - x\| = 0$. Comme

$$\big|\|x - a\| - \|x_n - a\|\big| \leq \big\|(x - a) - (x_n - a)\big\| = \|x_n - x\| ,$$

on a $\|x - a\| = \lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n - a\|$, donc $\|x - a\| \leq r$ par passage des inégalités larges à la limite. On a ainsi prouvé que $x \in B$, donc que B est "stable par passage à la limite".

Même preuve avec une sphère $S = S(a, r)$, en remplaçant l'inégalité $\|x_n - a\| \leq r$ par l'égalité $\|x_n - a\| = r$.

3. Lien entre ouverts et fermés.

Le résultat essentiel de ce paragraphe est le suivant:

Proposition.

Les fermés sont les complémentaires des ouverts (et réciproquement).

Preuve. • *Soit A une partie ouverte d'un espace vectoriel normé E, soit $F = E \setminus A$ son complémentaire. Il s'agit de montrer que F est fermé, c'est-à-dire stable par passage à la limite. Soit donc (x_n) une suite convergente d'éléments de F, soit $x = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$. Supposons $x \notin F$, alors $x \in A = E \setminus F$, et comme A est ouvert, x est intérieur à A, donc il existe une* *boule $B(x,r)$ avec $r>0$ qui est incluse dans A. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, on a $\|x_n - x\| < r$ pour n assez grand, donc $x_n \in B(x,r)$ pour n assez grand, ce qui contredit le fait que la suite (x_n) est à valeurs dans $F = E \setminus A$. Ainsi $x \in F$, ce qui montre que F est fermé.*

• *Soit F une partie fermée de E, soit $A = E \setminus F$ son complémentaire, montrons que A est ouvert. Soit $x \in A$. Si x n'était pas intérieur à A, alors aucune boule de centre x ne serait incluse dans A et, pour tout n entier naturel non nul, on pourrait trouver un point x_n dans la boule $B\Big(x, \dfrac{1}{n}\Big)$ qui n'appartiendrait pas à A, et qui donc appartiendrait à F. Comme $\|x_n - x\| \leq \dfrac{1}{n}$ pour tout n, la suite (x_n) d'éléments de F convergerait vers x qui n'est pas élément de F, ce qui contredit le caractère fermé de la partie F. Donc A est ouvert.*

On a donc prouvé que le complémentaire d'un ouvert est fermé, et que le complémentaire d'un fermé est ouvert.

4. <u>Stabilité par les opérations ensemblistes.</u>

On a les propriétés suivantes:

<u>Proposition.</u>

(a): une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert ;

(b): une intersection <u>finie</u> d'ouverts est un ouvert ;

(c): une réunion <u>finie</u> de fermés est un fermé ;

(d): une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Preuve.

(a). *Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts dans un espace vectoriel normé E, soit*

$$V = \bigcup_{i\in I} V_i = \big\{x \in E \mid \exists i \in I \quad x \in V_i\big\} .$$

Nous devons montrer que V est ouvert, i.e. que tout point de V est intérieur à V. Soit donc $x \in V$, alors il existe un indice $i \in I$ tel que $x \in V_i$. Comme V_i est ouvert, le point x est intérieur à V_i, donc il existe $r>0$ tel que $B(x,r) \subset V_i$. Comme $V_i \subset V$, on a aussi $B(x,r) \subset V$, ce qui montre que x est intérieur à V.

(b). *Soient V_1, $\cdots$, V_n des ouverts de E, soit*

$$W = \bigcap_{i=1}^{n} V_i = \big\{x \in E \mid \forall i \in [\![1,n]\!] \quad x \in V_i\big\} .$$

Soit $x \in V$. Alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, x appartient à V_i, donc est intérieur à V_i puisque V_i est ouvert, il existe donc $r_i > 0$ tel que $B(x,r_i) \subset V_i$. Posons $r = \min\limits_{1\leq i\leq n} r_i$, alors $r>0$ et $B(x,r) \subset B(x,r_i)$ pour tout i, donc $B(x,r) \subset V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i$. Le point x est donc intérieur à V. On a prouvé que V est ouvert.

(c). *Se déduit de* **(b)** *par passage au complémentaire. Détaillons! Soient F_1, $\cdots$, F_n des fermés de E, leurs complémentaires V_1, $\cdots$, V_n sont alors ouverts. L'ensemble $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i$ est* *alors ouvert d'après* **(b)**, *donc son complémentaire est fermé i.e., par les lois de Morgan, l'ensemble*

$$E \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (E \setminus V_i) = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$$

est fermé, ce qu'il fallait démontrer.

(d). *Se déduit de* **(a)** *par passage au complémentaire. Ne détaillons pas!*

Remarque. Les propositions **(b)** et **(c)** ne s'étendent pas à des intersections ou réunions infinies. En effet, dans $E = \mathbb{R}$, considérons les ouverts $V_n = \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} V_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}^* \quad -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \right\} = \{0\} \ ,$$

qui n'est pas un ensemble ouvert. De même, considérons $F_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, chaque ensemble F_n est fermé, et leur réunion

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \quad -1 + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \right\} =]-1, 1[$$

n'est pas fermée.

5. Cas de la dimension finie.

Proposition. Les "notions topologiques" (parties ouvertes ou fermées, points intérieurs ou adhérents) sont invariantes par passage à une norme équivalente.

Commentaire. On a déjà mentionné le fait que, en remplaçant une norme N sur un espace vectoriel E par une norme N' qui lui est équivalente, les points intérieurs et les points adhérents à une partie A de E restent les mêmes. Il en résulte que les parties ouvertes ou fermées seront aussi les mêmes dans l'e.v.n. (E, N) et dans l'e.v.n. (E, N').

Conséquence. Comme, dans un espace vectoriel E **de dimension finie**, les normes sont toutes équivalentes, on en déduit facilement que les notions "topologiques" (points intérieurs ou adhérents, parties ouvertes ou fermées), de même que la convergence d'une suite et la valeur de sa limite, ne dépendent pas de la norme choisie sur E ; on pourra parler de partie ouverte dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par exemple, sans avoir à préciser quelle norme a été choisie pour en faire l'étude.

V. Limite et continuité d'une application en un point.

1. Notion de limite d'une application.

Dans ce paragraphe, on considère deux espaces vectoriels normés $\big(E, \|\cdot\|_E\big)$ et $\big(F, \|\cdot\|_F\big)$.

Définition. Soit A une partie de E, soit $f : A \to F$ une application. Soient d'autre part a un point de E adhérent à la partie A, et l un point de F. On dit que f **admet pour limite** l **au point** a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que, pour tout élément x de A, la relation $\|x - a\|_E \leq \alpha$ implique $\big\|f(x) - l\big\|_F \leq \varepsilon$.

Cela se formalise donc en

$$(\mathbf{1}): \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in A \qquad \|x - a\|_E \leq \alpha \Longrightarrow \left\|f(x) - l\right\|_F \leq \varepsilon \ .$$

ou encore, en introduisant des boules, par

$$(\mathbf{2}): \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in A \qquad x \in \overline{B_E}(a, \alpha) \Longrightarrow f(x) \in \overline{B_F}(l, \varepsilon) \ .$$

Remarque. Dans **(1)**, on peut remplacer les inégalités larges de l'implication par des inégalités strictes sans modifier le sens de la proposition (*on admet*). Donc, dans **(2)**, on peut remplacer les boules fermées par des boules ouvertes.

Commentaires. Cela signifie donc que, si on se donne un réel strictement positif ε (que l'on peut interpréter comme une "précision requise"), pour que "$f(x)$ soit proche de l à ε près", il suffit que "x soit proche de a à α près", pour un certain $\alpha > 0$ associé à ce ε.

Propriété (unicité de la limite). La fonction f ne peut admettre deux limites distinctes l et l' au même point $a \in \overline{A}$.

Preuve. Par l'absurde: si c'était le cas, par l'axiome de séparation de la norme, on aurait $\|l' - l\|_F = d > 0$. Puis, en choisissant $\varepsilon = \dfrac{d}{3}$ par exemple:

- comme f admet pour limite l au point a, on pourrait lui associer un $\alpha > 0$ tel que $\|x - a\|_E \leq \alpha \Longrightarrow \left\|f(x) - l\right\|_F \leq \varepsilon$;

- comme f admet pour limite l' au point a, on pourrait lui associer un $\beta > 0$ tel que $\|x - a\|_E \leq \beta \Longrightarrow \left\|f(x) - l'\right\|_F \leq \varepsilon$;

Posons $\eta = \min\{\alpha, \beta\}$, alors $\eta > 0$ et, si $x \in A$ vérifie $\|x - a\|_E \leq \eta$, on a alors simultanément les deux inégalités $\left\|f(x) - l\right\|_F \leq \varepsilon$ et $\left\|f(x) - l'\right\|_F \leq \varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire, on déduirait alors $\|l - l'\|_F \leq 2\varepsilon$, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ.

Notations. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{a} f = l$.

Remarque. Si E et F sont des espaces vectoriels quelconques, il est nécessaire de préciser quelles sont les normes choisies sur chacun d'eux. Si, toutefois, on remplace la norme $\|\cdot\|_E$ sur E par une norme qui lui est équivalente, ou bien la norme $\|\cdot\|_F$ sur F par une norme qui lui est équivalente, on retrouvera bien sûr les mêmes limites aux mêmes points.

Si E et F sont de dimension finie, les normes étant alors toutes équivalentes, le fait qu'une fonction admette une limite en un point et la valeur de cette limite ne dépendent pas des normes choisies sur E et sur F.

2. <u>Caractérisation séquentielle de la limite.</u>

<u>Proposition.</u> Soit A une partie de E, soit $f : A \to F$ une application, soient a un point de E adhérent à la partie A, et l un point de F. Alors la fonction f admet l pour limite au point a si et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de A convergeant vers a, la suite-image $\big(f(x_n)\big)$ converge vers l.

Preuve.

• *Supposons $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. Soit (x_n) une suite d'éléments de A convergeant vers a. Comme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in A$ vérifiant $\|x - a\|_E \leq \alpha$, on ait $\big\|f(x) - l\big\|_F \leq \varepsilon$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier n supérieur ou égal à N, on ait $\|x_n - a\|_E \leq \alpha$. Pour $n \geq N$, on a alors $\big\|f(x_n) - l\big\|_F \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.*

• *Montrons la réciproque par contraposition, supposons donc que f n'admette pas l pour limite au point a, cela s'écrit*

$$\exists\varepsilon > 0 \quad \forall\alpha > 0 \quad \exists x \in A \qquad \|x - a\|_E \leq \alpha \quad \text{et} \quad \big\|f(x) - l\big\|_F > \varepsilon\ .$$

Choisissons un tel ε. Alors, pour tout n entier naturel non nul, il existe un $x_n \in A$ tel que $\|x_n - a\|_E \leq \dfrac{1}{n}$ et $\big\|f(x_n) - l\big\|_F > \varepsilon$. Ainsi, (x_n) est une suite d'éléments de A convergeant vers a (puisque $\|x_n - a\|_E \leq \dfrac{1}{n}$), mais la suite-image $\big(f(x_n)\big)$ ne converge pas vers l puisqu'on a $\big\|f(x_n) - l\big\|_F > \varepsilon$ pour tout n, où ε est un réel strictement positif fixé.

<u>Exemple 1.</u> Prenons $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$, soit $A = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ le plan privé de l'origine, soit $a = (0,0)$, il est alors clair que $a \in \overline{A}$. Considérons la fonction $f : A \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in A \qquad f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\ .$$

On a alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$: en effet, si $\big((x_n,y_n)\big)$ est une suite de couples de réels telle que $(x_n,y_n) \neq (0,0)$ pour tout n et que $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n,y_n) = (0,0)$, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, alors pour tout n, on a l'encadrement

$$0 \leq f(x_n,y_n) = \frac{x_n^2\,y_n^2}{x_n^2+y_n^2} \leq \frac{(x_n^2+y_n^2)\,y_n^2}{x_n^2+y_n^2} = y_n^2$$

qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = 0$. Par caractérisation séquentielle, on a donc prouvé que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

<u>Exemple 2.</u> Reprenons $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ et $a = (0,0)$. Soit la fonction $g : A \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in A \qquad g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\ .$$

Cette fonction g n'admet pas de limite en $(0,0)$. En effet, si elle admettait une limite l en ce point, alors pour toute suite de couples $\big((x_n,y_n)\big)$ tendant vers $(0,0)$ avec $(x_n,y_n) \neq (0,0)$, la suite-image $\big(f(x_n,y_n)\big)$ tendrait toujours vers cette même limite l. Or, on observe que les suites $\left(f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right)$ et $\left(f\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)\right)$ sont constantes de valeurs $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ respectivement, alors que les suites $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ et $\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)$ convergent toutes les deux vers $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$, cela contredit donc l'existence d'une limite pour la fonction g en $(0,0)$.

3. Cas de la dimension finie.

Soient $\big(E,\|\cdot\|_E\big)$ et $\big(F,\|\cdot\|_F\big)$ deux espaces vectoriels normés, **avec F de dimension finie**. Soit A une partie de E, soit $f : A \to F$ une application. Si $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ est une base de E, alors pour tout $x\in A$, le vecteur $f(x)$ de F se décompose de façon unique dans la base $\mathcal{B}$, notons $f(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i$. On définit ainsi n fonctions $f_i : A\to\mathbb{K}$ $(1\le i\le n)$, appelées **fonctions coordonnées** de f relativement à la base $\mathcal{B}$. Avec les mêmes notations, on a alors

Proposition. Soient a un point de E adhérent à la partie A, et l un point de F se décomposant dans la base $\mathcal{B}$ en $l=\sum_{i=1}^{n} l_i e_i$. Alors la fonction f admet l pour limite au point a si et seulement si, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, la fonction f_i admet pour limite l_i au point a.

On a donc $\lim_{x\to a} f(x)=l \iff \forall i\in[\![1,n]\!] \quad \lim_{x\to a} f_i(x)=l_i$, autrement dit la limite d'une fonction vectorielle (à valeurs dans un espace de dimension finie) peut s'étudier coordonnée par coordonnée dans une base.

Preuve. Analogue à celle vue pour les suites dans le paragraphe **III.2.**

4. Opérations algébriques et composition.

Proposition. Soient $f : A\to F$, $g : A\to F$ (mêmes notations que ci-dessus), soient $a\in E$ adhérent à A, $l\in F$, $l'\in F$, $\alpha\in\mathbb{K}$.
Si $\lim_{x\to a} f(x)=l$ et $\lim_{x\to a} g(x)=l'$, alors $\lim_{x\to a}\big(\alpha f(x)+g(x)\big)=\alpha l+l'$.

Preuve. Bôf!

Le théorème sur les limites d'une fonction composée est plus joli à démontrer, surtout si on fait un dessin avec des boules:

Proposition. Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, soient A une partie de E, B une partie de F, soient deux applications $f : A\to B$ et $g : B\to G$. On peut alors définir $g\circ f : A\to G$. Soient $a\in E$ adhérent à A, $b\in F$ adhérent à B, soit enfin $l\in G$.
Si $\lim_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim_{y\to b} g(y)=l$, alors $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x)=l$.

Preuve. Par caractérisation séquentielle. Soit (x_n) une suite d'éléments de A convergeant vers a. Comme $\lim_a f=b$, on a alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=b$, la suite $\big(f(x_n)\big)$ étant à valeurs dans B. Puis, comme $\lim_b g=l$, on déduit que la suite (z_n) définie par $z_n=g\big(f(x_n)\big)=(g\circ f)(x_n)$ converge vers l. Ceci étant vrai **pour toute** *suite (x_n) d'éléments de A convergeant vers a, on a prouvé que $\lim_a (g\circ f)=l$.*

5. Continuité en un point.

Définition. Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit A une partie de E, soit $f : A \to F$ une application, soit $a \in A$. On dit que la fonction f est **continue** au point a si on a $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Il importe de préciser que cette notion n'a de sens que si $a \in A$, autrement dit si la fonction f est déjà définie au point a.

Remarque. Si f est définie en un point a (autrement dit si a appartient à $A = D_f$) et si, de plus, elle admet une limite en ce point, alors nécessairement cette limite vaut $f(a)$. *En effet, posons $l = \lim_{x \to a} f(x)$, alors par caractérisation séquentielle de la limite, pour toute suite (x_n) d'éléments de A convergeant vers a, la suite-image $\big(f(x_n)\big)$ converge vers l. En considérant la suite constante donnée par $x_n = a$ pour tout n, on déduit que la suite constante de valeur $f(a)$ doit converger vers l, donc $l = f(a)$.* Si a appartient à l'ensemble de définition A de f, finalement f est continue en a si et seulement si elle admet une limite en ce point.

Du paragraphe **2.** ci-dessus, on déduit immédiatement la **caractérisation séquentielle de la continuité en un point**: une fonction $f : A \to F$ est continue en un point a de A si et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de A convergeant vers a, la suite-image $\big(f(x_n)\big)$ converge vers $f(a)$.

Propriété. Avec les notations de la définition ci-dessus, si F est de dimension finie rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, notons $f_1, \cdots, f_n$ les fonctions coordonnées de f relativement à la base $\mathcal{B}$. Alors f est continue en un point a de A si et seulement si chaque fonction coordonnée f_i, $1 \leq i \leq n$, est continue au point a.

VI. Continuité sur une partie.

1. Définition et propriétés élémentaires.

On considère toujours deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés $\big(E, \|\cdot\|_E\big)$ et $\big(F, \|\cdot\|_F\big)$, et on note A une partie de E.

Définition. Une application $f : A \to F$ est dite **continue sur la partie** A si elle est continue en tout point de A.

Remarque. Dans le cas d'une partie B qui n'est pas la totalité de l'ensemble de définition, on adoptera la convention suivante: une application $f : A \to F$ est dite continue sur B (B étant une partie de A) si sa restriction $f|_B$ est continue sur B. Ainsi, la fonction partie entière $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$, est continue sur $[0, 1[$ puisque sa restriction à cet intervalle est constante donc continue ; la fonction partie entière n'est pourtant pas continue en 0. Dans le cas où $D_f = A = E$ et B est une partie ouverte de E, il n'y a pas alors d'ambigüité: la continuité de la restriction $f|_B$ équivaut bien à la continuité de f en tout point de B.

Des opérations sur les limites (paragraphe **V.4.** ci-dessus), on déduit les résultats suivants:

Proposition. Si $f : A \to F$ et $g : A \to F$ sont continues, si $\alpha \in \mathbb{K}$, alors la fonction $\alpha f + g$ est continue sur A.

L'ensemble $\mathcal{C}(A, F)$ des fonctions continues de A vers F est donc muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Si $\big(G, \|\cdot\|_G\big)$ est un troisième espace vectoriel normé, si B est une partie de F, alors:

<u>Proposition.</u> Si $f : A \to B$ et $g : B \to G$ sont continues, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur A.

En résumé, une composée d'applications continues est continue.

Bien sûr, si F est de dimension finie, une application $f : A \to F$ est continue sur A si et seulement si chacune des fonctions coordonnées de f relativement à une certaine base $\mathcal{B}$ de F est continue sur A.

2. <u>Fonctions lipschitziennes.</u>

<u>Définition.</u> Avec les notations introduites ci-dessus, une application $f : A \to F$ est dite **lipschitzienne** s'il existe un réel strictement positif k tel que

$$(*) : \qquad \forall (x,y) \in A^2 \qquad \big\|f(x) - f(y)\big\|_F \leq k\, \|x - y\|_E\ .$$

Lorsque **(*)** est satisfait, on dit que f est k-lipschitzienne sur A, ou encore lipschitzienne de rapport k sur la partie A.

La composée de deux fonctions lipschitziennes est encore lipschitzienne. Plus précisément, si $f : A \to B$ est k-lipschitzienne sur A et si $g : B \to G$ est k'-lipschitzienne sur B, alors $g \circ f$ est kk'-lipschitzienne sur A. *C'est évident, yaka l'écrire!*

<u>Exemple.</u> L'application norme $N : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto N(x) = \|x\|_E$, est 1-lipschitzienne sur l'espace vectoriel normé (E, N), la norme choisie sur l'espace d'arrivée $\mathbb{R}$ étant la valeur absolue. Cela résulte en effet du "côté obscur" de l'inégalité triangulaire: si $x \in E$ et $y \in E$, alors

$$\big|N(x) - N(y)\big| \leq N(x - y)\ .$$

<u>Proposition.</u> Toute fonction lipschitzienne sur A est continue sur A.

Preuve. Si $f : A \to F$ est k-lipschitzienne sur A avec $k > 0$, si on fixe $a \in A$, si (x_n) est une suite de points de A convergeant vers a, on a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n - a\|_E = 0$. Comme, pour tout entier n, on a $\big\|f(x_n) - f(a)\big\|_F \leq k\, \|x_n - a\|_E$, on déduit par majoration que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$, ce qui prouve par caractérisation séquentielle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, donc que f est continue au point a.

3. <u>Images réciproques d'ouverts et de fermés.</u>

On a la propriété topologique suivante:

<u>Proposition.</u> Soient E et F deux e.v.n., soit $f : E \to F$ une application continue.

(1): l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E ;

(2): l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.

Preuve. Pour **(1)**, *notons B une partie fermée de F, et posons*

$$A = f^{-1}(B) = \big\{x \in E \mid f(x) \in B\big\}\ .$$

Soit (x_n) une suite convergente d'éléments de A, soit x sa limite. Il faut montrer que $x \in A$. Comme $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$ et que f est continue, on a $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x)$. Or, $f(x_n) \in B$ pour tout n et la partie B est fermée, donc $f(x) \in B$, ce qui signifie que $x \in A = f^{-1}(B)$.

La proposition **(2)** *s'en déduit par passage au complémentaire: si V est un ouvert de F, alors $F \setminus V$ est fermé dans F, puis $E \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(F \setminus V)$ est fermé dans E, i.e. $f^{-1}(V)$ est ouvert dans E.*

Voici des conséquences de ce résultat général:

<u>Proposition.</u> Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$, alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert, et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geq 0$ sont des fermés.

Preuve. Posons $A = \{x \in E \mid f(x) > 0\}$, alors $A = f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et, comme $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$, son image réciproque par f est une partie ouverte de E.

On considère de même les ensembles

$$B = \{x \in E \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\}) \qquad \text{et} \qquad C = \{x \in E \mid f(x) \geq 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_+)\ ,$$

qui sont les images réciproques des parties fermées $\{0\}$ et $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ de $\mathbb{R}$, et qui sont donc des parties fermées de E.

Ainsi, une partie du plan définie par des inégalités strictes sera ouverte alors qu'une partie du plan définie par des inégalités larges sera fermée (à condition, bien sûr, que les deux membres des inégalités soient des fonctions continues des coordonnées x et y). Par exemple, le triangle

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\ ,\ y > 0\ ,\ x + y < 1\}$$

est une partie ouverte, alors que le triangle

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ x + y \leq 1\}$$

(qui est l'adhérence du précédent) est une partie fermée. En effet, pour le premier, on a $T = A \cap B \cap C$ avec

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}\ ,\ B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}\ ,\ C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - x - y > 0\}\ ,$$

et les applications de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ définies par $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$, $(x, y) \mapsto 1 - x - y$ sont continues, donc les parties A, B, C sont ouvertes d'après la proposition ci-dessus, puis T est une intersection finie d'ouverts donc est encore un ouvert.

VII. <u>Espaces vectoriels normés de dimension finie.</u>

1. <u>Rappels.</u>

Nous avons déjà vu deux résultats essentiels sur ce sujet:

- **Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes** (admis). Il en résulte que la notion de suite convergente et la valeur de sa limite, la notion de limite d'une fonction, les notions topologiques (points intérieurs ou adhérents, parties ouvertes ou fermées) ne dépendent pas de la norme choisie sur E ;

- La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite en un point d'une fonction, ou la notion de continuité d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie peut s'étudier coordonnée par coordonnée dans une base de F.

2. <u>Théorème des bornes atteintes.</u>

Voici un théorème (admis) généralisant un résultat du cours de première année:

<u>Proposition.</u> Toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.

Ce théorème trouvera son utilité un peu plus tard, en le combinant avec des résultats de calcul différentiel non encore étudiés.

• Par exemple, la fonction $f : (x,y) \mapsto xy(1-x-y)$ est continue sur la partie fermée bornée du plan:

$$\Delta = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ x+y \leq 1\big\}\ ,$$

donc elle atteint un maximum $M = \max\limits_{(x,y)\in\Delta} f(x,y)$ sur cette partie. Comme f est nulle sur la frontière $\mathrm{Fr}(\Delta) = \Delta \setminus \overset{\circ}{\Delta}$, i.e. sur les trois côtés du triangle, et qu'elle est strictement positive sur l'intérieur

$$\overset{\circ}{\Delta} = T = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\ ,\ y > 0\ ,\ x+y < 1\big\}\ ,$$

ce maximum est atteint sur la partie ouverte T, ce qui permet d'utiliser le cours de calcul différentiel pour le rechercher (il est atteint en un point critique de f).

• Ce théorème permettra aussi d'obtenir sans calcul des conditions de domination (par une fonction constante) utiles pour l'application des théorèmes sur les intégrales dépendant d'un paramètre (continuité, dérivation) lorsque l'intervalle d'intégration est un segment, nous en reparlerons.

3. <u>Continuité des applications linéaires.</u>

On retiendra qu'**en dimension finie, les applications linéaires sont continues.** On a, plus précisément, le résultat suivant:

<u>Proposition.</u> Soient E et F deux espaces vectoriels normés, <u>avec E de dimension finie</u>. Alors toute application linéaire de E vers F est lipschitzienne sur E, donc continue.

Preuve. Notons $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ les normes choisies sur E et F respectivement. Soit une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Alors l'application

$$N_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| \end{array} \right.$$

est une norme sur E. Pour $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on a

$$\big\|u(x)\big\|_F = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i\, u(e_i) \right\|_F \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\ \big\|u(e_i)\big\|_F\ .$$

En posant $k = \max\limits_{1\leq i\leq n} \big\|u(e_i)\big\|_F$, on a alors

$$\forall x \in E \qquad \big\|u(x)\big\|_F \leq k\ \sum_{i=1}^{n} |x_i| = k\, N_1(x)\ .$$

Enfin, comme E est de dimension finie, les normes N_1 et $\|\cdot\|_E$ sont équivalentes, il existe donc $C>0$ tel que $N_1(x)\leq C\|x\|_E$ pour tout $x\in E$. On a donc $\big\|u(x)\big\|_F\leq kC\,\|x\|_E$ pour tout $x\in E$.

Enfin, par la linéarité de u, si x et y sont deux vecteurs de E, on a

$$\big\|u(x)-u(y)\big\|_F=\big\|u(x-y)\big\|_F\leq kC\,\|x-y\|_E\ ,$$

donc u est (kC)-lipschitzienne sur E, donc u est continue sur E.

Exemple. Soit $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Alors l'application

$$\Phi:\begin{cases}\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\\ M & \mapsto & PMP^{-1}\end{cases}$$

est linéaire, donc continue. On en déduit que, si (A_k) est une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ convergeant vers une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}PA_kP^{-1}=PAP^{-1}$.

4. Continuité des applications multilinéaires et polynomiales.

Prouvons d'abord le lemme suivant:

Lemme. Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés, avec E et F de dimension finie, soit $b:E\times F\to G$ une application bilinéaire. Alors il existe $k>0$ tel que

$$\forall (x,y)\in E\times F\qquad \big\|b(x,y)\big\|_G\leq k\,\|x\|_E\,\|y\|_F\ .$$

Preuve. Soit $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ une base de E, soit $\mathcal{C}=(f_1,\cdots,f_p)$ une base de F. Si $x=\displaystyle\sum_{i=1}^n x_ie_i$ est un vecteur de E, et $y=\displaystyle\sum_{j=1}^p y_je_j$ est un vecteur de F, alors par bilinéarité,

$$b(x,y)=b\Big(\sum_{i=1}^n x_ie_i,\sum_{j=1}^p y_je_j\Big)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^p x_iy_j\,b(e_i,f_j)\ .$$

Posons $M=\max\limits_{i,j}\big\|b(e_i,f_j)\big\|_G$, on a alors par l'inégalité triangulaire,

$$\big\|b(x,y)\big\|_G\leq\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^p|x_i|\,|y_j|\,\big\|b(e_i,f_j)\big\|_G\leq M\ \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^p|x_i|\,|y_j|=M\ N_1(x)\ N_1'(y)\ ,$$

en notant N_1 et N_1' les normes sur E et F respectivement, définies par

$$N_1\Big(\sum_{i=1}^n x_ie_i\Big)=\sum_{i=1}^n|x_i|\quad\text{et}\quad N_1'\Big(\sum_{j=1}^p y_jf_j\Big)=\sum_{j=1}^p|y_j|\ .$$

Comme E et F sont de dimension finie, ces normes N_1 et N_1' sont respectivement équivalentes aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$, il existe donc deux constantes C et C' strictement positives telles que $N_1\leq C\,\|\cdot\|_E$ et $N_1'\leq C'\,\|\cdot\|_F$. On a finalement obtenu

$$\forall (x,y)\in E\times F\qquad \big\|b(x,y)\big\|_G\leq k\,\|x\|_E\,\|y\|_F\ ,$$

avec $k=MCC'$.

On en déduit la continuité des applications bilinéaires si les espaces de départ sont de dimension finie:

<u>Proposition.</u> Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés, avec E et F de dimension finie. Alors toute application bilinéaire de $E \times F$ vers G est continue.

Preuve. Soit $b : E \times F \to G$ bilinéaire, soit $m_0 = (x_0, y_0) \in E \times F$, prouvons la continuité de b au point m_0. Commençons par écrire que, si $m = (x, y)$ est un point de $E \times F$, on a

$$b(m) - b(m_0) = b(x, y) - b(x_0, y_0) = b(x - x_0, y) + b(x_0, y - y_0) \ ,$$

cela résulte de la bilinéarité de b. Du lemme ci-dessus et de l'inégalité triangulaire, on déduit que

$$\left\|b(x, y) - b(x_0, y_0)\right\|_G \leq k \left(\|x - x_0\|_E \, \|y\|_F + \|x_0\|_E \, \|y - y_0\|_F\right) \ .$$

Lorsque le point $m = (x, y)$ tend vers le point $m_0 = (x_0, y_0)$ dans $E \times F$, c'est-à-dire lorsque x tend vers x_0 dans E et y tend vers y_0 dans $F^{(*)}$, les quantités $\|x - x_0\|_E$ et $\|y - y_0\|_F$ tendent vers 0 et, comme $\|y\|_F$ reste borné dans un voisinage de y_0, on déduit par majoration que $\left\|b(x, y) - b(x_0, y_0)\right\|_G$ tend vers 0, ce qu'il fallait prouver.

$^{(*)}$: Pour rendre plus rigoureux ce point, on peut mentionner qu'en posant

$$\left\|(x, y)\right\|_{E\times F} = \max\left\{\|x\|_E, \|y\|_F\right\}$$

pour tout $(x, y) \in E \times F$, on définit ainsi une norme sur l'espace vectoriel $E \times F$ qui est de dimension finie.

<u>Exemple.</u> L'application $\Phi : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K}) \\ (M, N) & \mapsto & MN \end{cases}$ est bilinéaire, donc est continue. On se référera à cette propriété en mentionnant la "continuité du produit matriciel".

Cela signifie que, si (A_k) et (B_k) sont deux suites de matrices, respectivement dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et dans $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, si $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = A$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} B_k = B$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k B_k = AB$.

Plus généralement, **les applications multilinéaires en dimension finie sont continues**. Cela signifie que, si $E_1, \cdots, E_n$ sont des espaces vectoriels de dimension finie, si F est un e.v.n., si $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ est n-linéaire (i.e. linéaire par rapport à chaque variable), alors f est continue. *Cela se démontre comme le cas bilinéaire, mais c'est plus lourd à écrire.*

Par exemple, si $\mathcal{B}$ est une base d'un espace vectoriel de dimension n, l'application

$$\det_{\mathcal{B}} : \begin{cases} E^n & \to & \mathbb{K} \\ (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & \det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) \end{cases}$$

est continue.

On en déduit que **le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n dépend continûment de la matrice, i.e. l'application**

$$\det : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & \det(A) \end{cases}$$

est continue. *En effet, on a* $\det(A) = \det_{\mathcal{B}_0}\big(C_1(A), \cdots, C_n(A)\big)$, *où* $\mathcal{B}_0$ *est la base canonique de* $\mathbb{K}^n$ *et* $C_1(A)$, $\cdots$, $C_n(A)$ *sont les colonnes de la matrice* A, *cela signifie que* $\det = \det_{\mathcal{B}_0} \circ \gamma$, *avec*

$$\gamma : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & (\mathbb{K}^n)^n \\ A & \mapsto & \big(C_1(A), \cdots, C_n(A)\big) \end{cases}.$$

L'application γ *est linéaire donc continue, enfin* $\det$ *est continue comme composée de deux fonctions continues.*

<u>**Définition.**</u> Une application $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto f(x_1, \cdots, x_n)$, est dite **polynomiale** lorsque chacune de ses applications partielles est polynomiale, i.e. pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, pour tout $(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^{n-1}$, l'application (d'une seule variable scalaire)

$$\begin{cases} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & f(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_n) \end{cases}$$

est polynomiale.

<u>**Exemple.**</u> Sur $\mathbb{K}^3$, les applications $f : (x, y, z) \mapsto x^3 + y^3 + z^3$, ou bien

$$g : (x, y, z) \mapsto x^3 y^2 - 6xyz + 4yz^3$$

sont polynomiales.

<u>**Proposition.**</u> **Toute application polynomiale sur** $\mathbb{K}^n$ **est continue.**

Preuve. Bôf!

À quoi ça sert ? Je ne sais pas! C'est écrit dans le programme! Je suppose que l'idée est d'en déduire la continuité du déterminant d'une matrice par rapport à cette matrice (puisque le déterminant d'une matrice est une fonction polynomiale des coefficients de la matrice, cela peut se démontrer par récurrence sur la taille de la matrice), mais je préfère nettement la preuve proposée ci-dessus en considérant cette application déterminant comme composée d'une application linéaire et d'une application multilinéaire.

<u>**Conséquence.**</u> **L'ensemble** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ **est ouvert dans** $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**.** *En effet, c'est l'image réciproque par l'application continue* $\det$ *de l'ensemble* $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ *qui est une partie ouverte de* $\mathbb{K}$.