# CORRIGÉ du D.M. de MATHÉMATIQUES numéro 5
# PSI2 2024-2025

## EXERCICE

**1.a.** Soit $\varphi$ un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ admettant une valeur propre $\lambda$ telle que $|\lambda| > 1$. Il existe alors un vecteur $x$ non nul tel que $\varphi(x) = \lambda x$. On déduit immédiatement que $\varphi^p(x) = \lambda^p\, x$ pour tout entier naturel $p$, donc $\|\varphi^p(x)\| = |\lambda|^p\, \|x\|$ tend vers l'infini lorsque $p$ tend vers l'infini, et l'endomorphisme $\varphi$ n'est pas borné. On a ainsi prouvé, par contraposition que, si un endomorphisme est borné, alors toutes ses valeurs propres sont de module inférieur ou égal à 1.

**b.** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $A$ est triangulaire, on voit que sa seule valeur propre est 1. Mais on obtient facilement $A^p = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel $p$ (*pour cela, écrire $A = I_2 + N$, avec $N = E_{1,2}$ matrice élémentaire, et développer par la formule du binôme de Newton... ou encore faire une récurrence*). En notant $(e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{C}^2$, on a $A^p\, e_2 = p\, e_1 + e_2$ et $\|A^p e_2\| = p$ tend vers l'infini, donc $\varphi$ n'est pas borné.

**c.** Supposons $\varphi$ diagonalisable, il existe alors une base $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{C}^n$ constituée de vecteurs propres de $\varphi$, notons $\lambda_1$, $\cdots$, $\lambda_n$ les valeurs propres (ici non nécessairement distinctes) associées à $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$, et supposons-les toutes de module inférieur ou égal à 1. Si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$ est un vecteur de $\mathbb{C}^n$, on a $\varphi^p(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i^p\, x_i\, \varepsilon_i$ pour tout entier naturel $p$. Par l'inégalité triangulaire, tenant compte de $|\lambda_i| \leq 1$ pour tout $i$, on obtient

$$\|\varphi^p(x)\| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^p\, |x_i|\, \|\varepsilon_i\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\, \|\varepsilon_i\|$$

(*majoration par une quantité indépendante de $p$*), donc la suite $\big(\|\varphi^p(x)\|\big)_{p \in \mathbb{N}}$ est bornée pour tout vecteur $x$, et $\varphi$ est un endomorphisme borné.

**2.a.** On a $y = (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})(x)$, donc $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})(y) = (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^2(x) = 0$, soit $\varphi(y) = \lambda\, y$. On a $\varphi(x) = \lambda x + y$, puis

$$\varphi^2(x) = \lambda\, \varphi(x) + \varphi(y) = \lambda^2\, x + \lambda\, y + \lambda\, y = \lambda^2\, x + 2\lambda\, y\ .$$

Par une récurrence immédiate, on obtient $\varphi^p(x) = \lambda^p\, x + p\, \lambda^{p-1}\, y$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

**b.** Par l'inégalité triangulaire (le côté obscur!) et avec $|\lambda| = 1$, on obtient

$$\|\varphi^p(x)\| \geq \Big|\|\lambda^p x\| - \|p\lambda^{p-1}\, y\|\Big| \geq \|p\lambda^{p-1}\, y\| - \|\lambda^p\, x\| = p\, \|y\| - \|x\|\ .$$

Si $y$ était non nul, on déduirait de cela que $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \|\varphi^p(x)\| = +\infty$, ce qui est absurde. Donc $y = 0$, ce qui signifie que $x \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})$.

**c.** On a donc $\mathrm{Ker}\,\big((\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^2\big) = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})$ car on vient de prouver l'inclusion dans le sens direct, l'autre étant triviale.

Montrons que $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}) \cap \mathrm{Im}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}) = \{0\}$ : si un vecteur $x$ appartient à cette intersection, alors il existe un vecteur $y$ tel que $x = (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})(y)$ et, par ailleurs, $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})(x) = 0$ ; donc $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^2(y) = 0$ et $y \in \mathrm{Ker}\,\big((\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^2\big) = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})$, d'où $x = 0$.

La somme de ces deux sous-espaces a donc pour dimension la somme de leurs dimensions (car c'est une somme directe), c'est-à-dire $n$ d'après le théorème du rang. En conclusion,

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})\ .$$

**3.** Le nombre 1 est bien valeur propre de la matrice $M$ (ou de l'endomorphisme $\varphi$ associé), un vecteur propre associé étant $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Par ailleurs, la matrice $M$ est bornée car, avec $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, on obtient $MX = \begin{pmatrix}px+qy+rz\\qx+py+rz\\qx+ry+pz\end{pmatrix}$ et, les trois nombres $p$, $q$, $r$ vérifiant $|p|+|q|+|r| = p+q+r = 1$, chacune des trois coordonnées du vecteur $MX$ peut être majorée par

$$(|p|+|q|+|r|)\cdot\max\{|x|,|y|,|z|\} = \|X\| \;,$$

donc $\|MX\| \leq \|X\|$ puis, bien sûr, $\|M^pX\| \leq \|X\|$ pour tout $p$, et $M$ (ou $\varphi$) est bornée. De la question **2.**, on déduit que $\mathbb{C}^3 = \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(\varphi - \mathrm{id})$.

---

## PROBLÈME, *d'après Centrale 2020 PSI*

### PARTIE A.

**1.** La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = (x+1)\,e^x$. Sa dérivée est positive sur $[-1,+\infty[$ et ne s'annule qu'au point 1, donc $f$ est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$. Comme elle est continue, d'après le théorème de la bijection, elle établit une bijection de cet intervalle vers son image. Or, $f(-1) = -e^{-1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc $f\big([-1,+\infty[\big) = \big[-e^{-1},+\infty\big[$.

**2.** Notons $g : [-1,+\infty[ \to \big[-e^{-1},+\infty\big[$ la bijection induite par $f$. Le "théorème de la bijection" cité ci-dessus (*et que certains appellent "corollaire du TVI" ou des trucs approchant*) indique aussi que, comme $g$ est continue et strictement monotone sur $[-1,+\infty[$, sa réciproque $g^{-1} = U : \big[-e^{-1},+\infty\big[ \to [-1,+\infty[$ est aussi continue, sur $\big[-e^{-1},+\infty\big[$ donc.

De plus, $g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur la demi-droite ouverte $]-1,+\infty[$, sa dérivée ne s'annulant pas sur cet intervalle. Il résulte alors du cours de première année que la fonction réciproque $U = g^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $g\big(]-1,+\infty[\big) = \big]-e^{-1},+\infty\big[$.

On sait enfin que $\forall y \in \big]-e^{-1},+\infty\big[\quad U'(y) = \big(g^{-1}\big)'(y) = \dfrac{1}{g'\big(U(y)\big)} = \dfrac{1}{f'\big(U(y)\big)}$.

**3.** Comme $f(0) = 0$, on déduit $U(0) = 0$. Puis $f'(0) = 1$ donc $U'(0) = \dfrac{1}{f'\big(U(0)\big)} = 1$.

**4.** Comme $U$ est dérivable en 0, elle y admet un développement limité à l'ordre un: $U(x) = U(0) + U'(0)\,x + o(x) = x + o(x)$, ce qui s'écrit encore $U(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Pour tout $x > 0$, on a $f\big(U(x)\big) = x$, soit $U(x)\,e^{U(x)} = x$. En prenant le logarithme, on obtient $U(x) + \ln\big(U(x)\big) = \ln(x)$. Comme $U(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, le terme $\ln\big(U(x)\big)$ est négligeable devant le terme $U(x)$, il reste $\ln(x) = U(x) + o\big(U(x)\big)$, soit $U(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.

**5.** *cf.* fin du corrigé: en rouge, la courbe $\mathcal{C}_f$, en vert la courbe $\mathcal{C}_U$. Les deux courbes ont la même tangente à l'origine qui est aussi la première bissectrice. La tangente à $\mathcal{C}_U$ au point d'abscisse $-e^{-1}$ est verticale.

**6.** Pour tout $\alpha$ réel, la fonction $h : x \mapsto x^\alpha U(x)$ est continue sur $]0,1]$ et $h(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^{\alpha+1} = \dfrac{1}{x^{-1-\alpha}}$, donc $h$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $-1-\alpha < 1$, donc **ssi** $\alpha > -2$.

**7.** La même fonction $h$ vérifie $h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^\alpha \ln(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^{-\alpha}}$. Discutons alors:

- si $\alpha \geq -1$, alors $-\alpha \leq 1$ donc $x \mapsto \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$ n'est pas intégrable en $+\infty$. Comme $h(x) \geq \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$ au voisinage de $+\infty$, a fortiori $h$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

- si $\alpha < -1$, soit un réel $\beta$ tel que $\alpha < \beta < -1$. Alors $x^{-\beta}h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{x^{\beta-\alpha}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées puisque $\beta - \alpha > 0$, donc $h(x) = o\left(\dfrac{1}{x^{-\beta}}\right)$ au voisinage de $+\infty$, et comme $-\beta > 1$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^{-\beta}}$ est intégrable en $+\infty$ et, par comparaison, $h$ l'est aussi.

**Bilan.** La fonction $x \mapsto x^\alpha\, U(x)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$.

**PARTIE B.**

**8.** Les $A_k$ sont des polynômes à degrés échelonnés puisque $\deg(A_k) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, ils forment donc une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

**9.** La relation est vraie pour $k = 1$ puisque $A_1 = 1$ et $A_1'(X) = 1 = A_0(X) = A_0(X - a)$.

Pour $k \in [\![2, n]\!]$, on calcule

$$\begin{aligned} A_k'(X) &= \frac{1}{k!}\left[(X-ka)^{k-1} + (k-1)X(X-ka)^{k-2}\right] \\ &= \frac{1}{k!}\,(X-ka)^{k-2}\,\big(X - ka + (k-1)X\big) \\ &= \frac{1}{k!}\,(X-ka)^{k-2}\,k\,(X-a) \\ &= \frac{1}{(k-1)!}\,(X-a)\,\big((X-a)-(k-1)a\big)^{k-2} \;=\; A_{k-1}(X-a)\,. \end{aligned}$$

**10.** • Le polynôme $A_k$ est de degré $k$ donc, pour $j > k$, sa dérivée $j$-ième est le polynôme nul, ainsi $A_k^{(j)}(ja) = 0$.

• Si $0 \leq j \leq k$, une récurrence immédiate montre que $A_k^{(j)}(X) = A_{k-j}(X - ja)$, on obtient alors

$$A_k^{(j)}(ja) = A_{k-j}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k-j > 0 \\ 1 & \text{si} \quad k-j = 0 \end{cases}.$$

**Bilan.** Pour $(j, k) \in [\![0, n]\!]^2$, on a $A_k^{(j)}(ja) = \delta_{j,k}$.

**11.** Notons $\alpha_0, \cdots, \alpha_n$ les coordonnées du polynôme $P$ dans la base $\mathcal{A}$, on a alors $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k A_k$.

Soit $j \in [\![0, n]\!]$ fixé. En dérivant $j$ fois cette identité polynomiale et en l'évaluant en $ja$, on obtient

$$P^{(j)}(ja) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, A_k^{(j)}(ja) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, \delta_{j,k} = \alpha_j\ ,$$

c'est ce qu'il fallait démontrer. On a donc **(*):** $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(ka)\, A_k$ pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$.

**12.** Fixons un nombre complexe $y$, et considérons le polynôme $P = (X+y)^n \in \mathbb{C}_n[X]$, on a alors $P^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}(X+y)^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ et, en appliquant **(*)** à ce polynôme, on obtient l'identité polynomiale dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\begin{aligned}(X+y)^n &= P(0)\times 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}\,(y+ka)^{n-k}\,A_k(X)\\ &= y^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\,(y+ka)^{n-k}\,X\,(X-ka)^{k-1}\,. \qquad \textbf{(**)}\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à évaluer cette identité polynomiale en un nombre complexe $x$ pour obtenir la relation demandée.

**13.** Comme il n'est pas conforme au programme de dériver par rapport à une variable complexe, repartons de l'identité polynomiale **(**)** et dérivons formellement dans $\mathbb{C}[X]$. On va d'abord isoler le terme pour $k=1$ qui risquerait de nous amener des puissances négatives en dérivant. On a donc

$$\textbf{(**)}: \qquad (X+y)^n = y^n + n\,(y+ka)^{n-1}\,X + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\,(y+ka)^{n-k}\,X\,(X-ka)^{k-1}\,.$$

En dérivant dans $\mathbb{C}[X]$, cela donne

$$\begin{aligned}n\,(X+y)^{n-1} &= n\,(y+ka)^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\,(y+ka)^{n-k}\,(X-ka)^{k-2}\,\big((X-ka)+(k-1)X\big)\\ &= n\,(y+ka)^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\,(y+ka)^{n-k}\,(X-ka)^{k-2}\,k\,(X-a)\,.\end{aligned}$$

On évalue pour $X=0$ et on assaisonne avant de servir:

$$n\,y^{n-1} = n\,(y+ka)^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\,(y+ka)^{n-k}\,(-ka)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\,(y+ka)^{n-k}\,(-ka)^{k-1}\,.$$

**PARTIE C.**

**14.** Les coefficients $a_n$ étant tous non nuls pour $n \geq 1$, essayons la règle de d'Alembert:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^n}{(n+1)!}\,\frac{n!}{n^{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$$

(*calcul classique*), donc $R = \dfrac{1}{e} = e^{-1}$.

**15.** Le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la fonction somme $S$ est du cours et on a $S^{(n)}(0) = n!\,a_n = (-n)^{n-1}$ pour tout $n$ entier naturel non nul, et $S(0)=0$.

**16.** Posons $u_n(x) = a_n x^n$ et $I = [-R,R] = \big[-e^{-1}, e^{-1}\big]$. Alors

$$\|u_n\|_{\infty,I} = |a_n|\,R^n = |a_n|\,e^{-n} = \frac{n^{n-1}}{n!}\,e^{-n}\,.$$

C'est le moment ou jamais d'utiliser la formule de Stirling!

$$\|u_n\|_{\infty,I} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^n}{n}\,\frac{e^{-n}}{\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{e}{n}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\;n^{3/2}}\ .$$

Par comparaison à une série de Riemann, on déduit la convergence de la série de terme général $\|u_n\|_{\infty,I}$, c'est-à-dire la convergence normale sur $I=[-R,R]$ de la série de fonctions $\sum u_n$. Les fonctions $u_n$ étant toutes continues sur $I$, on déduit la continuité sur $I$ de la fonction somme $S$.

**17.** Posons $a_0=1$, ainsi $1+S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ sur $]-R,R[$, et $x\,S'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n$.

Alors, par produit de Cauchy (*toutes les séries sont absolument convergentes sur* $]-R,R[$):

$$\forall x\in\,]-R,R[\qquad x\,\big(1+S(x)\big)\,S'(x)=\left(\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^k\right)\left(\sum_{l=0}^{+\infty}l\,a_l\,x^l\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n\ ,$$

avec $c_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k\,(n-k)\,a_{n-k}=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\,(n-k)\,a_{n-k}$. En particulier $c_0=0$ et, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
c_n &= na_n+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\ \frac{(-1)^{k-1}k^{k-1}}{k!}\ \frac{(-1)^{n-k-1}(n-k)^{n-k-1}}{(n-k)!}\\
&= \frac{(-1)^{n-1}\,n^n}{n!}+\frac{(-1)^n}{n!}\ \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\ (n-k)^{n-k}\ k^{k-1}\\
&= \frac{(-1)^{n-1}\,n^n}{n!}+\frac{(-1)^n}{n!}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\ k^{k-1}\,(n-k)^{n-k}-n^{n-1}\right)\\
&= \frac{(-1)^{n-1}\,n^n}{n!}+\frac{(-1)^n}{n!}\ \big(n\times n^{n-1}-n^{n-1}\big)\qquad\textbf{(*)}\\
&= \frac{(-n)^{n-1}}{n!}\ =\ a_n\ .
\end{aligned}$$

**(*)** en utilisant la relation obtenue en **Q 13.** avec $a=-1$ et $y=n$.

On a donc, pour tout $x\in\,]-R,R[$ , l'égalité $x\,\big(1+S(x)\big)\,S'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n=S(x)$.

**18.** On calcule $x\,h'(x)=x\,\big(1+S(x)\big)\,S'(x)\,e^{S(x)}=S(x)\,e^{S(x)}=h(x)$, donc $h$ est solution sur $]-R,R[$ de l'équation différentielle **(E):** $xy'-y=0$.

**19.** Sur $]-R,0[$ ou bien sur $]0,R[$, l'équation **(E)** peut se mettre "sous forme normale" $y'-\dfrac{y}{x}=0$, on sait alors que ses solutions sont les fonctions de la forme $y:x\mapsto C\,e^{\ln|x|}=C\,|x|$ avec $C$ constante arbitraire, ou encore $y(x)=Kx$ avec $K$ constante arbitraire.

Si $f:\,]-R,R[\to\mathbb{R}$ est solution de **(E)** sur $]-R,R[$, alors $f$ est dérivable sur $]-R,R[$, et est solution de **(E)** sur $]-R,0[$ et aussi sur $]0,R[$, il existe donc deux réels $K$ et $K'$ tels que $f(x)=Kx$ sur $]-R,0[$ et $f(x)=K'x$ sur $]0,R[$, et bien sûr $f(0)=0$. La condition que $f$ est dérivable en 0 entraîne (*condition nécessaire*) l'égalité des constantes $K$ et $K'$, autrement dit $f$ est de la forme $x \mapsto Kx$ sur $]-R, R[$. La condition imposée est aussi suffisante puisque les fonctions $x \mapsto Kx$ sont clairement de classe $\mathcal{C}^1$ et solutions de **(E)** sur $]-R, R[$.

**Bilan.** Les solutions de **(E)** sur $]-R, R[$ (et même sur $\mathbb{R}$ tout entier d'ailleurs) sont les fonctions $x \mapsto Kx$, avec $K$ une constante.

**20.** Comme $h$ est solution de **(E)** sur $]-R, R[$, il existe un réel $K$ tel que $h(x) = Kx$ sur $]-R, R[$, soit $S(x)\, e^{S(x)} = Kx$. En dérivant cette relation, on obtient $\big(1 + S(x)\big)\, S'(x)\, e^{S(x)} = K$ sur $]-R, R[$ et, en évaluant en 0, comme $S(0) = 0$ et $S'(0) = a_1 = 1$, on obtient $K = 1$.

Pour $x \in \big] -e^{-1}, e^{-1} \big[$, le réel $t = S(x)$ vérifie l'équation $f\big(S(x)\big) = x$, où $f$ est la fonction introduite tout au début de ce problème. Pour affirmer que $S(x) = U(x)$, il reste à vérifier que $S(x) \geq -1$. Étudions deux cas:

- si $0 \leq x < e^{-1}$, la relation $S(x)\, e^{S(x)} = x$ entraîne que $S(x)$ est positif donc $S(x) \geq -1$ ;

- si $-e^{-1} < x < 0$, on voit que $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1} x^n}{n!}$ est négatif car c'est une somme de termes négatifs, que $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!}$ est positif car c'est une somme de termes positifs, enfin la relation $x\,\big(1 + S(x)\big)\, S'(x) = S(x)$ entraîne alors que $1 + S(x)$ est positif, donc $S(x) \geq -1$.

On peut conclure que $\forall x \in \big] -e^{-1}, e^{-1} \big[ \quad S(x) = U(x)$.

**21.** Les fonctions $S$ et $U$ sont continues sur l'intervalle fermé $\big[ -e^{-1}, e^{-1} \big]$ et elles coïncident sur l'intervalle ouvert $\big] -e^{-1}, e^{-1} \big[$, elles coïncident donc aussi en les points $-e^{-1}$ et $e^{-1}$.

En particulier,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}\, e^{-n}}{n!} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1} \big(-e^{-1}\big)^n}{n!} = -S\big(-e^{-1}\big) = -U\big(-e^{-1}\big) = -(-1) = 1\ .$$