ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

I. Équations linéaires scalaires d'ordre un (révisions et approfondissements).

1. Position du problème et linéarité.

Dans ce premier paragraphe, on se donne un intervalle I de $\mathbb{R}$, deux fonctions a et b **continues** sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, et on s'intéresse à l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) \quad : \qquad y' + a(x)\,y = b(x)$$

sur I. On appellera **solution** de cette équation différentielle toute fonction $f : I \to \mathbb{K}$, dérivable, telle que

$$\forall x \in I \qquad f'(x) + a(x)\,f(x) = b(x)\ .$$

Remarque. Toute fonction f solution de **(E)** est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. En effet, f est dérivable par définition, et sa dérivée $f' : x \mapsto b(x) - a(x)f(x)$ est continue sur I comme somme et produit de fonctions continues.

Cette équation **(E)** est qualifiée de **linéaire** car elle peut se mettre sous la forme $\Phi(y) = b$, où Φ est une application linéaire. En effet, posons $E = \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $F = \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, l'application

$$\Phi : \begin{cases} E \ \to \ F \\ f \ \mapsto \ \big(x \mapsto f'(x) + a(x)f(x)\big) \end{cases}$$

est linéaire (conséquence de la linéarité de la dérivation), et l'équation **(E)** s'écrit bien $\Phi(y) = b$. Tous les principes généraux régissant les équations linéaires s'appliquent donc ici, à savoir: on associe à l'équation "complète" **(E)** une **équation homogène (E0) :** $y' + a(x)y = 0$, qui peut s'écrire aussi $\Phi(y) = 0$. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de cette équation homogène est donc un sous-espace vectoriel de $E = \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ puisque $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Ker}(\Phi)$. Puis, si l'on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation complète **(E)**, si cet ensemble $\mathcal{S}$ est non vide, soit alors y_P un élément de $\mathcal{S}$ (que l'on a coutume d'appeler "solution particulière" de **(E)**), on a alors

$$\mathcal{S} = y_P + \mathcal{S}_0 = \big\{y_P + y_H \ ;\ y_H \in \mathcal{S}_0\big\}\ ,$$

autrement dit **on obtient la solution générale de l'équation complète (E) en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène associée (E0)**.

2. Résolution de l'équation homogène (E0).

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $a : I \to \mathbb{K}$ est continue, on peut remarquer que, si l'on note A une primitive de a sur I, alors la fonction A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a

$$\textbf{(*)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\,e^{A(x)}\big) = \big(f'(x) + a(x)f(x)\big)\,e^{A(x)}\ .$$

Donc f est solution de **(E0)** si et seulement si $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\,e^{A(x)}\big) = 0$ sur I, c'est-à-dire si et seulement si la fonction $x \mapsto f(x)\,e^{A(x)}$ est constante sur I. Les solutions de l'équation homogène **(E0)** sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto C\,e^{-A(x)}$, où $C \in \mathbb{K}$ est une constante arbitraire. Ainsi, **l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des fonctions solutions de (E0) est une droite vectorielle**, que l'on peut écrire $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\big(x \mapsto e^{-A(x)}\big)$.

3. Expression intégrale des solutions de (E).

Avec les mêmes notations que ci-dessus, si $b : I \to \mathbb{K}$ est aussi une fonction continue, si l'on fixe un point x_0 de I, par le théorème fondamental du calcul intégral, en réutilisant **(*)** ci-dessus, on a donc les équivalences

$$\begin{aligned}
f \text{ est solution de } \textbf{(E)} \text{ sur } I \quad &\iff \quad \forall x\in I \quad f'(x)+a(x)f(x)=b(x)\\
&\iff \quad \forall x\in I \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\,e^{A(x)}\big)=b(x)\,e^{A(x)}\\
&\iff \quad \exists C\in\mathbb{K} \quad \forall x\in I \quad f(x)\,e^{A(x)}=C+\int_{x_0}^{x} b(t)\,e^{A(t)}\,\mathrm{d}t\\
&\iff \quad \exists C\in\mathbb{K} \quad \forall x\in I \quad f(x)=\left(C+\int_{x_0}^{x} b(t)\,e^{A(t)}\,\mathrm{d}t\right)e^{-A(x)}\ .
\end{aligned}$$

On a ainsi obtenu une expression des solutions de **(E)** à l'aide d'une intégrale, ce qui montre qu'une équation différentielle de ce type admet toujours des solutions ($\mathcal{S}\neq\emptyset$) et qu'elle peut toujours se résoudre explicitement, à ceci près que l'expression sous l'intégrale n'admet pas forcément de primitives exprimables à l'aide des fonctions usuelles. Cette expression n'est surtout pas à apprendre par cœur, mais elle doit pouvoir être retrouvée avec aisance, car elle permet d'étudier le comportement des fonctions solutions (bornées ou non, limite à l'infini, ...).

On note aussi que les solutions s'expriment sous la forme $y=y_H+y_P$, où $y_H : x\mapsto Ce^{-A(x)}$ est la solution générale de l'équation homogène associée **(E0)**, et y_P une solution particulière qui serait ici la fonction $y_P : x\mapsto e^{-A(x)}\displaystyle\int_{x_0}^{x} b(t)\,e^{A(t)}\,\mathrm{d}t$. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation complète est alors une **droite affine** (HP) de direction $\mathcal{S}_0$.

Remarque, pour ceux qui y tiennent absolument! Une présentation légèrement différente de cette résolution est connue sous le nom de **méthode de la variation de la constante**. Une fois résolue l'équation homogène **(E0)**, ses solutions étant exprimées sous la forme $C\,y_H(x)$, où C est une constante arbitraire, on recherche les solutions de **(E)** sous la forme $y(x)=\lambda(x)y_H(x)$, où λ est maintenant une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (on dit alors que l'on fait un **changement de fonction inconnue**). C'est en fait le même calcul que celui fait ci-dessus, puisque $y_H(x)$ est de la forme $e^{-A(x)}$ **et donc ne s'annule pas sur** I (*ce qui rend légitime la méthode puisque toute fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ peut alors s'écrire sous la forme $y(x)=\lambda(x)y_H(x)$ avec λ de classe $\mathcal{C}^1$, il suffit de poser $\lambda(x)=\dfrac{y(x)}{y_H(x)}$*). On dérive: $y'(x)=\lambda'(x)y_H(x)+\lambda(x)y_H'(x)$, et on réinjecte dans l'équation, en utilisant le fait que l'on sait que y_H est solution de **(E0)**:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}) \quad &\iff \quad \lambda'(x)\,y_H(x)+\lambda(x)y_H'(x)+a(x)\,\lambda(x)\,y_H(x)=b(x)\\
&\iff \quad \lambda'(x)\,y_H(x)+\lambda(x)\,\big(y_H'(x)+a(x)\,y_H(x)\big)=b(x)\\
&\iff \quad \lambda'(x)\,y_H(x)=b(x)\\
&\iff \quad \lambda'(x)=\frac{b(x)}{y_H(x)}=b(x)\,e^{A(x)}
\end{aligned}$$

et il ne reste plus qu'à primitiver le second membre pour résoudre l'équation, comme dans le calcul fait plus haut. L'inconvénient majeur de cette méthode est que, lorsqu'elle est appliquée sans discernement, on se retrouve avec deux (voire trois!) constantes arbitraires dont on ne sait que faire... alors que l'ensemble des solutions est de dimension 1.

4. <u>Théorème de Cauchy linéaire (version 1).</u>

On se donne toujours deux fonctions continues a et b de I vers $\mathbb{K}$, et on note **(E)** l'équation différentielle $y' + a(x)\, y = b(x)$. Si on se donne de plus $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$, on appelle **problème de Cauchy (P)** la donnée de l'équation différentielle **(E)** et de la **condition initiale (CI):** $y(x_0) = y_0$.

<u>Proposition.</u> Ce problème de Cauchy (P) admet une solution unique.

Preuve. On reprend l'expression intégrale des solutions obtenue au paragraphe précédent en choisissant x_0 comme "point de base" pour exprimer les intégrales, et en choisissant pour A **la** *primitive de a qui s'annule en ce point x_0. Il suffit alors de montrer qu'il existe une et une seule constante C pour laquelle la condition initiale $f(x_0) = y_0$ est satisfaite. Or,*

$$f(x_0) = \left(C + \int_{x_0}^{x_0} b(t)\, e^{A(t)}\, \mathrm{d}t \right) e^{-A(x_0)} = C\ .$$

Le seul choix qui convient est alors $C = y_0$, ce qui prouve l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy **(P)**.

Réécrivons ce résultat sous une forme plus complète:

<u>Théorème de Cauchy linéaire.</u> Soient $a : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues, soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Alors le problème de Cauchy

$$(\mathbf{P})\ :\quad \begin{cases} (\mathbf{E})\ : & y' + a(x)\, y = b(x) \\ (\mathbf{CI})\ : & y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution, qui est la fonction $x \mapsto \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{A(t)}\, \mathrm{d}t \right) e^{-A(x)}$**,**

en notant A la primitive de a sur I qui s'annule en x_0, soit $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, \mathrm{d}t$**.**

<u>Remarque.</u> Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on appelle **courbes intégrales** de **(E)** les courbes représentatives des fonctions solutions de **(E)** sur I. Une interprétation graphique de ce premier théorème de Cauchy s'énonce en disant que, par tout point $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$, il passe une et une seule courbe intégrale de l'équation différentielle **(E)**.

5. <u>Forme normale d'une équation différentielle.</u>

La théorie qui précède (et notamment le théorème de Cauchy, et la structure de l'ensemble des solutions) s'applique à condition que l'équation différentielle étudiée puisse se mettre **sous forme normale**, i.e. en isolant y', donc sous la forme $y' = -a(x)\, y + b(x)$.

Il arrive toutefois que, dans des exercices ou problèmes, une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 soit présentée sous la forme

$$(\mathbf{E}')\ :\qquad \alpha(x)\, y' + \beta(x)\, y = \gamma(x)\ ,$$

où α, β, γ sont trois fonctions continues de I vers $\mathbb{K}$. **Si la fonction α ne s'annule pas sur I**, il suffit de diviser par $\alpha(x)$ pour mettre cette équation sous forme normale, et la théorie de Cauchy (unicité de la solution d'un problème de Cauchy, dimension 1 de l'espace des solutions) s'applique toujours. Si la fonction α s'annule en certains points de I, les résultats énoncés ci-dessus ne sont valables que sur des sous-intervalles J de I sur lesquels la fonction α ne s'annule pas. Il faut alors étudier des problèmes de recollement des solutions en les points d'annulation de la fonction α, ceci sera l'objet d'exercices en TD.

II. Équations linéaires scalaires d'ordre deux.

1. Position du problème et linéarité.

Je vous préviens, il y a pas mal de copié collé, mais l'on dit parfois que la pédagogie est affaire de répétition!

Dans ce paragraphe, on se donne un intervalle I de $\mathbb{R}$, trois fonctions a, b et c **continues** sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, et on s'intéresse à l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) \quad : \qquad y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = c(x)$$

sur I. On appellera **solution** de cette équation différentielle toute fonction $f : I \to \mathbb{K}$, deux fois dérivable, telle que

$$\forall x \in I \qquad f''(x) + a(x)\, f'(x) + b(x)\, f(x) = c(x) \; .$$

<u>Remarque.</u> Toute fonction f solution de **(E)** est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I. En effet, f est deux fois dérivable par définition, et sa dérivée seconde $f'' : x \mapsto -a(x)f'(x) - b(x)f(x) + c(x)$ est continue sur I comme somme et produit de fonctions continues.

Cette équation **(E)** est qualifiée de **linéaire** car elle peut se mettre sous la forme $\Phi(y) = c$, où Φ est une application linéaire. En effet, posons $E = \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ et $F = \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, l'application

$$\Phi : \begin{cases} E & \to & F \\ f & \mapsto & \big(x \mapsto f''(x) + a(x)f'(x) + b(x)f(x)\big) \end{cases}$$

est linéaire (conséquence de la linéarité de la dérivation), et l'équation **(E)** s'écrit bien $\Phi(y) = c$. Tous les principes généraux régissant les équations linéaires s'appliquent donc ici, à savoir: on associe à l'équation "complète" **(E)** une **équation homogène (E0) :** $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, qui peut s'écrire aussi $\Phi(y) = 0$. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de cette équation homogène est donc un sous-espace vectoriel de $E = \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ puisque $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Ker}(\Phi)$. Puis, si l'on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation complète **(E)**, si cet ensemble $\mathcal{S}$ est non vide, soit alors y_P un élément de $\mathcal{S}$ (que l'on a coutume d'appeler "solution particulière" de **(E)**), on a alors

$$\mathcal{S} = y_P + \mathcal{S}_0 = \big\{ y_P + y_H \; ; \; y_H \in \mathcal{S}_0 \big\} \; ,$$

autrement dit **on obtient la solution générale de l'équation complète (E) en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène associée (E0)**.

2. Théorème de Cauchy linéaire (version 2).

Contrairement à ce que l'on a vu pour les équations du premier ordre, il n'y a pas ici de méthode générale de résolution, et donc pas d'expression explicite (ni sous forme d'intégrale) des solutions de **(E)**. Nous nous contenterons d'admettre un théorème qui nous renseignera sur la structure de l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions.

Si, en plus de l'équation **(E)**, on se donne $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}$ et $z_0 \in \mathbb{K}$, on appelle **problème de Cauchy (P)** la donnée de l'équation différentielle **(E)** et des **conditions initiales (CI):** $\begin{cases} y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & z_0 \end{cases}$. On admettra que ce problème de Cauchy (P) admet une solution unique. Réécrivons un énoncé plus complet:

<u>Théorème de Cauchy linéaire.</u> Soient $a : I \to \mathbb{K}$, $b : I \to \mathbb{K}$ et $c : I \to \mathbb{K}$ trois fonctions continues, soient $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{K}$ et $z_0 \in \mathbb{K}$. Alors le problème de Cauchy

$$(\mathbf{P}) \ : \quad \begin{cases} (\mathbf{E}) \ : & y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = c(x) \\ (\mathbf{CI}) \ : & \begin{cases} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= z_0 \end{cases} \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

3. **<u>Conséquences.</u>**

<u>Proposition.</u> Avec les notations introduites dans le paragraphe II.1. ci-dessus, on a les résultats suivants:

(1): l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène (E0) est un plan vectoriel, i.e. $\dim(\mathcal{S}_0) = 2$;

(2): l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation complète (E) est non vide, et c'est un plan affine de direction $\mathcal{S}_0$.

Preuve. Pour **(1)**, *fixons $x_0 \in I$. Le théorème de Cauchy ci-dessus, appliqué avec $c = 0$, apporte, pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, l'existence et l'unicité d'une solution y de* **(E)** *telle que $y(x_0) = \alpha$ et $y'(x_0) = \beta$. En formalisant un peu, cela signifie que l'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{S}_0 & \to \ \mathbb{K}^2 \\ f & \mapsto \ \big(f(x_0), f'(x_0)\big) \end{cases}$ est bijective. Cette application φ étant clairement linéaire, on a ainsi un isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathcal{S}_0$ et $\mathbb{K}^2$, d'où l'égalité des dimensions.*

Pour **(2)**, *l'existence de solutions de* **(E)**, *c'est-à-dire le fait que $\mathcal{S} \neq \emptyset$, résulte clairement du théorème de Cauchy. La théorie générale des équations linéaires dit alors que, dans ce cas, on a $\mathcal{S} = y_P + \mathcal{S}_0$, donc $\mathcal{S}_0$ est un sous-espace affine de direction $\mathcal{S}_0$, donc ici un plan affine, mais cette terminologie n'est pas à votre programme.*

4. **<u>Méthode de variation de la constante (hors programme).</u>**

Reprenons l'équation différentielle **(E)** présentée dans le paragraphe **II.1.** Supposons que l'on connaisse une solution y_H de l'équation homogène **(E0)** ne s'annulant pas sur I. Il est alors possible, par une méthode de type “variation de la constante”, dite aussi **méthode de Lagrange**, d'achever la résolution de l'équation **(E)**.

Faisons en effet le changement de fonction inconnue $y(x) = z(x)\, y_H(x)$, où $z : I \to \mathbb{K}$ est une nouvelle “fonction inconnue” de classe $\mathcal{C}^2$. On dérive deux fois: $y' = z' y_H + z y'_H$, puis $y'' = z'' y_H + 2 z' y'_H + z y''_H$. On réinjecte dans **(E)**, et on simplifie en tenant compte du fait que y_H est solution de **(E0)**:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}) \quad \iff \quad & z'' y_H + 2 z' y'_H + z y''_H + a(x)\,(z' y_H + z y'_H) + b(x)\, z y_H = c(x) \\ \iff \quad & y_H(x)\, z'' + \big(2\, y'_H(x) + a(x)\, y_H(x)\big)\, z' + \big(y''_H(x) + a(x)\, y'_H(x) + b(x)\, y_H(x)\big)\, z = c(x) \\ \iff \quad & y_H(x)\, z'' + \big(2\, y'_H(x) + a(x)\, y_H(x)\big)\, z' = c(x)\ . \end{aligned}$$

En faisant maintenant le changement de fonction inconnue $u = z'$ avec $u \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$, on voit que u doit satisfaire une équation linéaire du premier ordre. On résout alors cette équation (*cf.* paragraphe **I.**), on recherche une primitive pour obtenir z, enfin on remultiplie par y_H pour obtenir y. Du point de vue de la pratique des calculs, une première constante arbitraire apparaît lorsqu'on résout l'équation du premier ordre que doit satisfaire la fonction u, une deuxième apparaît lorsqu'on exprime les primitives de u pour expliciter z, le résultat dépendra donc de deux constantes arbitraires, ce qui est bien cohérent avec la structure de plan affine de l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de **(E)**.

5. <u>Cas des équations à coefficients constants.</u>

a. <u>Équation homogène.</u> Dans ce paragraphe, nous considérons l'équation différentielle

$$(\mathbf{E0}) \ : \qquad a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0\ ,$$

où a, b, c sont trois nombres complexes, avec $a \neq 0$ (pour que l'équation soit véritablement du second ordre).

Notons d'abord qu'une fonction "exponentielle", c'est-à-dire de la forme $x \mapsto e^{rx}$ (avec $r \in \mathbb{C}$) est solution de **(E)** si et seulement si le coefficient r est solution de l'**équation caractéristique (C):** $ar^2 + br + c = 0$. Cette équation du second degré admet une racine double ou bien deux racines distinctes selon que le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est nul ou non. Notons r l'une des racines de **(C)**, alors la fonction $y_H : x \mapsto e^{rx}$ est une solution de **(E0)** ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, nous pouvons donc obtenir toutes les solutions de **(E0)** en appliquant la méthode de variation de la constante décrite ci-dessus, autrement dit faisons le changement de fonction inconnue $y(x) = z(x)\,y_H(x) = z(x)\,e^{rx}$, où $z \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une fonction inconnue. Cela permettra aussi de **<u>démontrer</u>** dans ce cas particulier que l'espace $\mathcal{S}_0$ des solutions est de dimension deux. De $y = z\,e^{rx}$, on déduit $y' = (z' + rz)e^{rx}$, puis $y'' = (z'' + 2rz' + r^2 z)e^{rx}$, on réinjecte dans l'équation **(E)**. En simplifiant par e^{rx} (qui est non nul), et en réordonnant, on obtient

$$(ar^2 + br + c)\,z + (2ar + b)\,z' + a\,z'' = 0\ , \quad \text{soit} \quad (\mathbf{F}) \ : \quad (2ar + b)\,z' + a\,z'' = 0$$

puisque r est racine de l'équation caractéristique **(C)**. S'ensuit une disjonction de cas:

- si r est racine double de **(C)**, alors r est aussi racine du polynôme dérivé $2aX + b$, donc l'équation **(F)** se réduit à $z'' = 0$, i.e. z est une fonction affine $x \mapsto Ax + B$, enfin $y(x) = (Ax + B)\,e^{rx}$;

- sinon, l'équation caractéristique **(C)** admet une racine r' distincte de r, qui est telle que $r + r' = -\dfrac{b}{a}$ (*relation connue!*). L'équation **(F)** devient donc $z'' = -\Big(2r + \dfrac{b}{a}\Big)\,z'$, ou encore $z'' = (z')' = (r' - r)\,z'$, dont les solutions sont $z'(x) = C\,e^{(r'-r)x}$, ce qui donne $z(x) = A + Be^{(r'-r)x}$ avec $B = \dfrac{C}{r' - r}$ (mais peu importe, ce sont des constantes arbitraires), et enfin $y(x) = Ae^{rx} + Be^{r'x}$.

<u>Bilan.</u> L'espace vectoriel $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation (E0) est de dimension deux. Plus précisément,

- si l'équation caractéristique (C) a deux racines distinctes r_1 et r_2, on a

$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto e^{r_1 x}\ ,\ x \mapsto e^{r_2 x}\right)\ ;$$

- si l'équation caractéristique (C) a une racine double r_0, on a

$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto e^{r_0 x}\ ,\ x \mapsto x\,e^{r_0 x}\right)\ .$$

Remarque. Dans de nombreuses applications, les coefficients a, b, c de l'équation sont réels et on s'intéresse aux fonctions solutions à valeurs réelles. Lorsque l'équation caractéristique a deux racines distinctes r_1 et r_2 qui sont complexes conjuguées (lorsque $\Delta < 0$ donc), posons $r_1 = \alpha + i\omega$ avec α et ω réels et $\omega \neq 0$, donc $r_2 = \alpha - i\omega$, et les solutions de **(E)** s'expriment sous la forme

$$y(x) = C\, e^{r_1 x} + D\, e^{r_2 x} = e^{\alpha x}\big(C\, e^{i\omega x} + D\, e^{-i\omega x}\big) \quad \text{avec} \quad (C, D) \in \mathbb{C}^2 \ .$$

Les solutions réelles s'expriment alors sous la forme

$$y(x) = e^{\alpha x}\big(\lambda\, \cos(\omega x) + \mu\, \sin(\omega x)\big) \quad \text{avec} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \ ,$$

ou encore sous la forme

$$y(x) = A\, e^{\alpha x}\, \cos(\omega x + \varphi) \quad \text{avec} \quad A \in \mathbb{R}_+^* \ , \ \varphi \in \mathbb{R} \ .$$

On reconnaît un oscillateur harmonique en régime pseudo-périodique.

b. Équation avec second membre (oscillations forcées).

Il est utile de savoir trouver une solution particulière lorsque le second membre est de la forme $x \mapsto A\, \cos(\omega x)$ ou $x \mapsto A\, \sin(\omega x)$ avec $\omega > 0$. Considérons par exemple l'équation "complète"

$$(\mathbf{E}) \ : \qquad a\, y'' + b\, y' + c\, y = A\, \cos(\omega x) \ ,$$

les coefficients a, b, c de l'équation étant supposés réels (et a non nul).

Recherchons une solution particulière sous la forme d'une fonction sinusoïdale de même pulsation ω que le second membre, soit $y = \lambda\, \cos(\omega x) + \mu\, \sin(\omega x)$. On dérive deux fois, on réinjecte dans **(E)**, cela donne, après réorganisation,

$$(\mathbf{E}) \iff \big((c - a\omega^2)\, \lambda + b\omega\, \mu\big)\, \cos(\omega x) + \big(-b\omega\, \lambda + (c - a\omega^2)\, \mu\big)\, \sin(\omega x) = A\, \cos(\omega x) \ .$$

Par identification, la famille $\big(x \mapsto \cos(\omega x)\ ,\ x \mapsto \sin(\omega x)\big)$ étant libre, on trouve une solution particulière de cette forme si et seulement si le système linéaire

$$(\Sigma) \ : \qquad \begin{cases} (c - a\omega^2)\, \lambda + b\omega\, \mu & = \ A \\ -b\omega\, \lambda + (c - a\omega^2)\, \mu & = \ 0 \end{cases}$$

admet des solutions. Le déterminant de ce système vaut $D = (c - a\omega^2)^2 + b^2\omega^2$.

Si ce déterminant est non nul, alors le système (Σ) est "de Cramer", il admet une solution (unique), il existe donc une solution particulière sinusoïdale de pulsation ω, i.e. de la forme $x \mapsto \lambda\, \cos(\omega x) + \mu\, \sin(\omega x)$, ou encore $x \mapsto B\, \cos(\omega x + \varphi)$.

Ce déterminant D, qui est une somme de deux carrés de réels, est nul si et seulement si $b = 0$ (oscillations non amorties) et $c - a\omega^2 = 0$, ce qui signifie que les complexes conjugués $i\omega$ et $-i\omega$ sont les racines de l'équation caractéristique associée à **(E0)**. Cela signifie encore que la pulsation excitatrice ω coïncide avec la pulsation propre de l'oscillateur, on observe le phénomène de **résonance** et, dans ce cas, on trouve une solution particulière de **(E)** de la forme $x \mapsto \lambda\, x\, \cos(\omega x) + \mu\, x\, \sin(\omega x)$, on a donc des oscillations dont l'amplitude augmente dangereusement avec le temps!

6. Recherche de solutions développables en série entière.

Dans le cas d'une équation différentielle linéaire scalaire du second ordre, à coefficients non constants, comme il n'existe pas de méthode générale de résolution, il est fréquent que l'on commence par rechercher les solutions développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ avec $0 < r \leq +\infty$. Si l'on obtient une telle solution ne s'annulant pas sur un certain intervalle I, on peut éventuellement terminer la résolution de l'équation par une variation de la constante (*cf.* paragraphe **II.4.** ci-dessus). Je n'ai pas de grands discours à faire sur le sujet, il faut pratiquer, voilà tout!

III. Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants.

Le programme ne mentionne plus aucun résultat théorique concernant ce type d'équations différentielles linéaires "vectorielles", le seule "compétence" exigible semble être de savoir résoudre le système sur des exemples simples en utilisant la diagonalisation de la matrice, lorsqu'elle est diagonalisable évidemment!

1. Exemples de résolution

Exemple 1. Commençons par le cas d'un système "diagonal" **(S):** $\begin{cases} x' &= 2x \\ y' &= 3y \end{cases}$. On cherche donc les fonctions vectorielles $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^1$, de la forme $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, telles que ces deux équations différentielles (ici indépendantes entre elles) soient vérifiées. Ce système **(S)** peut s'écrire sous la forme matricielle $X' = DX$, avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, et ses solutions sont les fonctions vectorielles $X = (x,y)$, avec $\begin{cases} x(t) &= C_1\, e^{2t} \\ y(t) &= C_2\, e^{3t} \end{cases}$, où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles (ou complexes si l'on recherche les solutions complexes).

Exemple 2. Étudions maintenant un système "diagonalisable" **(S'):** $\begin{cases} x' &= y \\ y' &= 3x+2y \end{cases}$. Cette fois-ci, les deux équations ne sont pas indépendantes, mais on peut se ramener à ce cas en diagonalisant la matrice. En effet, **(S')** peut s'écrire sous forme matricielle $X' = AX$, en notant $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ la fonction vectorielle inconnue (de classe $\mathcal{C}^1$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$), et en posant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule $\chi_A = X^2 - 2X - 3 = (X+1)(X-3)$, on a donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 3\}$, et A est diagonalisable, plus précisément $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (*les détails des calculs sont laissés au lecteur*). On note alors que

$$\textbf{(S')} \iff X' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \iff (P^{-1}X)' = D(P^{-1}X) \iff Y' = DY$$

en posant $Y = P^{-1}X$ (*cf.* cours sur la dérivation des fonctions vectorielles). Si l'on pose $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ pour tout t réel, on a donc fait un changement de fonction (vectorielle) inconnue en posant $X = PY$ ou $Y = P^{-1}X$. Donc

$$\textbf{(S')} \iff Y' = DY \iff \begin{cases} u' &= -u \\ v' &= 3v \end{cases} \iff \begin{cases} u(t) &= C_1\,e^{-t} \\ v(t) &= C_2\,e^{3t} \end{cases} \iff Y(t) = \begin{pmatrix} C_1\,e^{-t} \\ C_2\,e^{3t} \end{pmatrix}$$

et, finalement, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P\,Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1\,e^{-t} \\ C_2\,e^{3t} \end{pmatrix}$, ce qui donne

$$\begin{cases} x(t) &= C_1\,e^{-t} + C_2\,e^{3t} \\ y(t) &= -C_1\,e^{-t} + 3C_2\,e^{3t} \end{cases},$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires.

Exemple 3. Voici maintenant un système "triangulaire" **(S")**: $\begin{cases} x' &= -x + y \\ y' &= \quad -y \end{cases}$, on peut le mettre sous la forme $X' = TX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice T est triangulaire supérieure (et n'est pas diagonalisable puisqu'elle a une seule valeur propre et que ce n'est pas une matrice scalaire). On résout directement la deuxième équation: $y(t) = C_2\,e^{-t}$, puis on réinjecte dans la première que l'on écrit alors sous la forme $x'(t) + x(t) = C_2\,e^{-t}$, soit $e^{-t}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(x(t)\,e^{t}\big) = C_2\,e^{-t}$, soit $x(t)\,e^{t} = C_2 t + C_1$. Finalement, ce système se résout en

$$\begin{cases} x(t) &= (C_2 t + C_1)\,e^{-t} \\ y(t) &= C_2\,e^{-t} \end{cases}, \quad \text{ou encore} \quad X(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} t\,e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 1. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' &= \quad x + y \\ y' &= -4x - 3y \end{cases}$. Préciser la "trajectoire" passant par le point $A(1,1)$.

Exercice 2. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= x + z \\ z' &= x + y \end{cases}$. Montrer qu'il existe une unique solution vérifiant $\begin{cases} x(0) &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ z(0) &= 1 \end{cases}$, et l'expliciter.

Exercice 3. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

En déduire les solutions du système différentiel $\begin{cases} x' &= \quad x + y \\ y' &= -4x - 3y \end{cases}$.

2. Quelques généralités

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, considérons le système différentiel linéaire d'écriture matricielle $X' = AX$, où $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ est une fonction supposée dérivable de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{K}^n$, et $x_1, \cdots, x_n$ sont donc les n fonctions scalaires coordonnées de X, et elles sont dérivables.

- Si A est diagonalisable, posons $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Alors

$$X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \iff Y' = DY$$

en posant $Y = P^{-1}X$, soit $X = PY$. *En effet, la matrice P^{-1} étant constante, i.e. indépendante de la variable t, on a bien $Y' = (P^{-1}X)' = P^{-1}X'$ d'après le cours sur la dérivation des fonctions vectorielles.* On a donc posé un changement de fonction inconnue, la nouvelle fonction (vectorielle) inconnue étant $Y : t \mapsto Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$. Le système différentiel $X' = AX$ se ramène alors au système diagonal $Y' = DY$, soit

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1' & = & \lambda_1 y_1 \\ \cdots & & \cdots \\ y_n' & = & \lambda_n y_n \end{array} \right. , \quad \text{qui se résout en} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & C_1\, e^{\lambda_1 t} \\ \cdots & & \cdots \\ y_n & = & C_n\, e^{\lambda_n t} \end{array} \right. ,$$

où $C_1, \cdots, C_n$ sont des constantes arbitraires. Pour obtenir les fonctions vectorielles X solutions de $X' = AX$, il ne reste plus qu'à effectuer le produit matriciel $X = PY$.

- On peut noter aussi que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice quelconque (diagonalisable ou non), si l'on connaît un couple propre (λ, V) de A, i.e. $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est non nul et $AV = \lambda V$, alors la fonction vectorielle $X : t \mapsto e^{\lambda t}\, V$ est solution du système différentiel $X' = AX$. En effet, on a $X'(t) = \lambda\, e^{\lambda t} V = e^{\lambda t}\, \lambda V = e^{\lambda t}\, AV = AX$.