DM de MATHÉMATIQUES numéro 5 COMMENTAIRES
PSI2 2024-2025

EXERCICE

Un petit exercice sans grande difficulté mais demandant une rédaction rigoureuse. Je note tout d'abord que certains ont voulu retranscrire l'énoncé avec des quantificateurs (ce qui est louable) mais les quantificateurs, bien souvent, ne sont pas disposés dans le bon ordre, ce qui modifie le sens! Un endomorphisme φ de $\mathbb{C}^n$ est en effet "borné" si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{C}^n \quad \exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \left\|\varphi^p(x)\right\| \leq M \ ,$$

le majorant M ne doit pas dépendre de l'entier p mais **il doit dépendre du vecteur** x.

Le seul endomorphisme φ vérifiant $\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in \mathbb{C}^n \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left\|\varphi^p(x)\right\| \leq M$ est en effet l'endomorphisme nul, cela résulte immédiatement de l'homogénéité de la norme!!

1.a. Attention au vocabulaire: dire qu'une suite est **divergente** ne l'empêche pas d'être bornée, penser par exemple à $\big((-1)^n\big)$. Affirmer que, si $|\lambda| > 1$, la suite $(\lambda^p)_{p\in\mathbb{N}}$ "diverge" est exact, mais cela ne répond pas à la question posée puisqu'il faut en fait dire que cette suite **n'est pas bornée**.

Une remarque qui s'adresse à un petit nombre d'entre vous: dire que λ est valeur propre d'un endomorphisme φ ne signifie pas que $\varphi(x) = \lambda x$!!! Cela signifie qu'**<u>il existe</u>** x **<u>non nul</u>** tel que $\varphi(x) = \lambda x$. **Si vous omettez d'introduire correctement un vecteur propre x, vous risquez de perdre les points attribués à ce style de question!**

1.c. Des réponses souvent un peu trop vagues, le changement de base (multiplication par les matrices de passage) étant souvent passé sous silence. Prenez le temps d'approfondir pour montrer que vous maîtrisez votre sujet!

2.b. Si y est non nul, pourquoi a-t-on $\lim\limits_{p\to+\infty} \|py+\lambda x\| = +\infty$? Il est impératif ici de mentionner l'inégalité triangulaire (bien sûr c'est le "côté obscur" mais ça c'est une appellation non contrôlée).

3. On peut montrer directement que φ est borné (*cf.* corrigé), c'est certainement le plus rapide mais personne n'y a pensé! Sinon, il y a du travail, à savoir chercher les valeurs propres de φ et **montrer qu'elles sont <u>toutes</u> de module inférieur ou égal à 1** (vérification parfois oubliée), justifier que M est diagonalisable (avec une disjonction de cas, les valeurs propres n'étant pas nécessairement distinctes)...

PROBLÈME

1. La rédaction de cette question marque souvent quelques hésitations, sans doute par manque de connaissance précise du cours de première année: pour qu'une fonction soit **strictement** croissante sur un intervalle I, il suffit en effet qu'elle soit dérivable sur I, la dérivée étant positive et ne s'annulant qu'en un nombre fini de points. La fonction f est donc bien **strictement** croissante sur la demi-droite **fermée** $[-1, +\infty[$.

2. La continuité de la bijection réciproque est du cours de première année (inutile de rédiger une démonstration), et le caractère $\mathcal{C}^\infty$ aussi, à condition toutefois d'exclure les points en lesquels la dérivée première f' s'annule.

3. Les manipulations d'équivalents restent encore un gros problème pour nombre d'entre vous! Il y a tout de même un grand nombre de réponses correctes à cette question.

6. et 7. Plusieurs copies m'ont présenté du grand n'importe quoi!!! Le chapitre sur les fonctions intégrables, traité en octobre, aurait-il déjà été oublié ?

L'étude d'intégrabilité en $+\infty$ en utilisant une intégration par parties m'a rarement convaincu. Pour montrer la convergence, il suffit en effet de montrer que les deux termes issus de l'hipépé convergent, mais lorsque les deux termes divergent, eh bien on ne peut rien conclure!!! Comme pour les séries, "divergent + divergent" peut, au final, être convergent!

10. Un petit bilan pour conclure que, finalement, $A_k^{(j)}(ja) = \delta_{j,k}$ serait apprécié.

14. Houlala, le passage de $u \sim v$ à $e^u \sim e^v$ est encore fréquent dans vos copies pour montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$, il va pourtant falloir s'exercer à rédiger les choses autrement!

16. Beaucoup trop de TSSA dans vos copies, alors qu'ici il y a **convergence normale** donc simplement des critères de convergence de séries à termes positifs, ce qui est un argument beaucoup plus élémentaire... d'autant plus que, pour x négatif, i.e. pour $x \in \big[-e^{-1}, 0 \big[$, la série entière n'est même pas une série alternée! **Optimisez le choix de vos méthodes!**

Bien sûr il était pertinent ici d'utiliser la formule de Stirling, la règle de d'Alembert n'étant d'aucun secours pour étudier une série entière aux points $\pm R$, si R est le rayon de convergence (on est forcément en effet dans le "cas critique" avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$).

19. Des études de "recollement" des solutions plutôt bien traitées, avec quelques erreurs:

- il est évident que les solutions sur $]-R, R[$ ne sont pas les fonctions $x \mapsto \lambda |x|$ qui ne sont pas dérivables!

- le "problème de Cauchy" $\begin{cases} xy' - y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ n'a évidemment pas une solution unique sur $]-R, R[$ (toutes les fonctions $x \mapsto \lambda x$ sont solutions), ceci est dû au fait que le coefficient de y' dans l'équation s'annule en 0, donc le théorème de Cauchy linéaire ne s'applique pas sur $]-R, R[$ (l'équation n'est pas "sous forme normale").

20. Après avoir montré que $f\big(S(x)\big) = x$ pour $x \in]-R, R[$, pour affirmer que $S = U$ sur cet intervalle, il faut encore s'assurer que $S(x) \geq -1$. En effet, l'étude et la représentation graphique de la fonction f montrent que, pour $x \in \big] -e^{-1}, 0 \big[$, l'équation $f(t) = x$ admet une solution t_1 dans $]-1, 0[$ qui est $U(x)$, et aussi une solution t_2 dans l'intervalle $]-\infty, -1[$ et qui n'est donc pas $U(x)$.

21. Vous aurez peut-être reconnu $-S\big(-e^{-1}\big)$, il reste à prouver que les fonctions S et U, qui coïncident sur $]-R, R[$ ouvert, coïncident aussi au point $-R = -e^{-1}$, et ceci résulte de la continuité de U (question **Q2.**) et de S (question **Q16.**) sur l'intervalle fermé $[-R, R]$.