Convergence dominée et intégration terme à terme.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{n^2}\, e^{-\frac{x}{n}}$.

a. Montrer que chaque fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

b. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

c. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction intégrable f.

d. Quelle remarque peut-on faire ?

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ continue, telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Montrer que $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \quad \dfrac{2t}{\pi} \le \sin t$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{n\pi}{2}} \left(1 - \sin\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$.

4. Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}$. Montrer que f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Donner un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} f_n$.

5. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée, avec $f(0) \neq 0$. Donner un équivalent de

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}\, f(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

6. Par intégration terme à terme, calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1}\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

7. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,\frac{n!}{(2n)!}$.

8. Pour $x > 0$, on pose

$$s(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{xt} - 1}\,\mathrm{d}t\ .$$

Donner un développement de s en série de fonctions rationnelles. Donner un équivalent de $s(x)$ lorsque x tend vers 0. *Pour cette dernière question, on envisagera un encadrement de la série par des intégrales.*

9. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{12n}$. (*oral Mines-Ponts*)

10.a. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que la fonction $g : t \mapsto e^{-t}\, f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\, f(t)\, \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n f(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

b. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\, \ln(t)\, \mathrm{d}t = -\gamma$, où γ est la constante d'Euler, c'est-à-dire

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

11. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^{2n+1}\, \ln x}{x^2 - 1}$.

a. Montrer que f_n est intégrable sur $]0, 1[$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\, \mathrm{d}t$.

b. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

c. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

12.a. Pour p et q entiers naturels, convergence et calcul de $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p\, (\ln x)^q\, \mathrm{d}x$.

b. Prouver les égalités $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ et $\displaystyle\int_0^1 x^x\, \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

13. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^n}$.

a. Déterminer $l = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

b. Donner un équivalent de $I_n - l$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1 + t^n)\, \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk + 1)}$.

d. En déduire un équivalent de $J_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1 + t^n)\, \mathrm{d}t$, puis un développement asymptotique à trois termes de I_n.

14. Pour $a > 0$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na + 1}$.

Intégrales dépendant d'un paramètre.

15. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x\,(1+t)}$.

a. Montrer que f est définie et monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$, et aussi lorsque $x \to 0^+$.

16. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

a. Ensemble de définition de f ?

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

c. Expliciter f.

17. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Montrer que $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \big(f(t)\big)^x\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \big(\varphi(x)\big)^{\frac{1}{x}}$.

18. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) telle que $f(0) = 0$. On définit $g : I \to \mathbb{R}$ par $g(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ si $t \neq 0$, et $g(0) = f'(0)$.

a. Montrer la relation $\forall t \in I \quad g(t) = \displaystyle\int_0^1 f'(tu)\,\mathrm{d}u$.

b. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I ; calculer $g^{(k)}(0)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

19. Pour $x > -1$, on pose $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,t^x\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$.

b. Calculer $g'(x)$. En déduire $g(x)$.

20. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que $F(x)$ est bien défini pour tout $x \geq 0$.

b. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$.

c. Calculer $F^{(n)}(0)$ pour n entier naturel.

21. Pour $x > 0$ et $y > 0$, on pose $F(x,y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}\,\mathrm{d}t$. Pour $y > 0$ fixé, montrer que l'application partielle $x \mapsto F(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$. En déduire l'expression de $F(x,y)$.

22.a. Pour x réel positif, on pose $g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, calculer $g'(x)$. En déduire $g(x)$ pour $x > 0$

b*. Pour $x > 0$, montrer que $g(0) - g(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(u) \sin \frac{u}{x} \, \mathrm{d}u$ où φ est la fonction définie par $\varphi(u) = \frac{1 - e^{-u}}{u}$. À l'aide d'une intégration par parties, prouver l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \, .$$

23. Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$, continues, telles que $\forall x \in I \quad u(x) < v(x)$. Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'application $g : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t) \, \mathrm{d}t$ est continue sur I. *On pourra poser* $t = u(x) + s \big(v(x) - u(x)\big)$*, où* s *désigne une nouvelle variable.*

Transformées de Laplace et de Fourier. Intégrales eulériennes

24. On pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \, e^{-t} \, \mathrm{d}t$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.

b. À l'aide d'une intégration par parties itérée, calculer l'intégrale (avec $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$):

$$I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t \, .$$

c. Montrer que

$$\forall x > 0 \qquad \Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x \, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \, .$$

25. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, on note Tf ou encore $\widehat{f}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad Tf(x) = \widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \, e^{-ixt} \, \mathrm{d}t \, .$$

La fonction $\widehat{f} = Tf$ est la **transformée de Fourier** de f. L'application $T : f \mapsto Tf$ est la **transformation de Fourier**.

a. Montrer que la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f est définie sur $\mathbb{R}$, et que c'est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

b. Soit la fonction "créneau" φ définie par $\varphi(t) = 1$ si $t \in [-1, 1]$ et $\varphi(t) = 0$ sinon. Calculer sa transformée de Fourier $x \mapsto \widehat{\varphi}(x)$.

c. Soit a un réel strictement positif, soit la fonction f définie par $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = e^{-a|t|}$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa transformée de Fourier $\widehat{f}$.

d. On suppose dans cette question que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et intégrable sur $\mathbb{R}$, et que sa dérivée f' est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{t \to -\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$, puis prouver la relation $\forall x \in \mathbb{R} \quad \widehat{f'}(x) = ix \, \widehat{f}(x)$

Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux, la **transformée de Laplace** *de f est la fonction $\mathcal{L}[f]$ définie par*

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tout réel p tel que cette intégrale est convergente.

26. Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes, en précisant le domaine de définition :

$$f : t \mapsto t^n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad ; \qquad g : t \mapsto e^{at} \quad (a \in \mathbb{C}) \quad ; \qquad s : t \mapsto \sin \omega t \quad (\omega \in \mathbb{R}_+^*) \quad ;$$

$$c : t \mapsto \cos \omega t \quad (\omega \in \mathbb{R}_+^*) \quad ; \qquad h : t \mapsto \frac{\sin t}{t} \; .$$

27. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe un réel p_0 tel que la fonction $t \mapsto e^{-p_0 t}\, f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

a. Montrer que la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f]$ est définie et continue sur l'intervalle $[p_0, +\infty[$.

b. Montrer que la fonction $\mathcal{L}[f]$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]p_0, +\infty[$ et que, sur cet intervalle, on a, pour tout n entier naturel, la relation $\big(\mathcal{L}[f]\big)^{(n)} = (-1)^n\, \mathcal{L}[g_n]$, où g_n est la fonction définie par $g_n(t) = t^n\, f(t)$.

28. Théorème de la valeur finale

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, continue par morceaux, admettant une limite finie en $+\infty$: $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = l$.

Montrer que la transformée $\mathcal{L}[f]$ est définie (au moins) sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\lim_{p \to 0^+} p \cdot \mathcal{L}[f](p) = l = \lim_{t \to +\infty} f(t) \; .$$

Exercices avec Python

29. Soit $g :]0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^x$.

a. Prolonger g par continuité en 0.

b. Représenter graphiquement g. Justifier l'allure de g au voisinage de 0. Déterminer les coordonnées du minimum.

c. Donner une valeur approchée de $I = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

d. On admettra que $\displaystyle\int_0^1 (x\, \ln x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n\, n!}{(n+1)^{n+1}}$ pour tout n entier naturel. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

e. Écrire une fonction `calcul(e)` retournant la valeur de l'intégrale I avec une précision `e` passée en argument.