ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES et FONCTIONS VECTORIELLES
CORRIGÉS PSI2 2024-2025

Équations linéaires scalaires d'ordre un.

1. Soit l'équation différentielle **(E)** : $x(1+x)\,y' + (1+x)\,y = 1$.

a. Résoudre l'équation **(E)** sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,+\infty[$.

b. Montrer que **(E)** n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$, mais qu'il existe une et une seule solution sur $]-1,+\infty[$.

c. Préciser le lieu des points à tangente horizontale sur les courbes intégrales de **(E)**.

- -

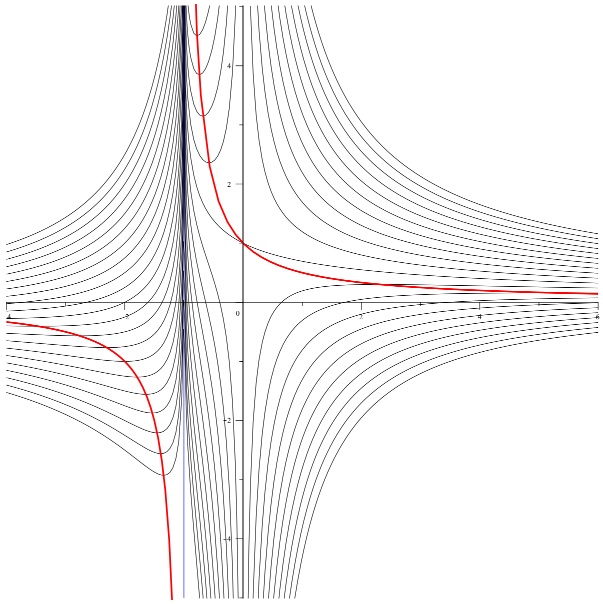
a. Sur chacun des intervalles mentionnés, l'équation **(E)** s'écrit $xy' + y = \dfrac{1}{1+x}$, soit encore $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy) = \dfrac{1}{1+x}$, et a donc pour solutions les fonctions $x \mapsto \dfrac{\ln|1+x| + k}{x}$, où $k \in \mathbb{R}$ est une constante.

b. L'équation **(E)**, évaluée pour $x = -1$, donne $0 = 1$ absurde : il n'y a donc pas de solution sur $\mathbb{R}$ tout entier, ni sur aucun intervalle contenant le point -1.

Si y est une solution de **(E)** sur $]-1,+\infty[$, alors son expression est de la forme $y(x) = \dfrac{\ln(1+x) + k_1}{x}$ sur $]-1,0[$, et elle est de la forme $y(x) = \dfrac{\ln(1+x) + k_2}{x}$ sur $]0,+\infty[$. Pour qu'une telle fonction soit prolongeable par continuité en 0, il est nécessaire que $k_1 = k_2 = 0$. Réciproquement, la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$, prolongée par $0 \mapsto 1$, est bien dérivable sur $]-1,+\infty[$ (*on vérifie facilement qu'elle admet un développement limité à l'ordre un en 0, donc qu'elle est dérivable en ce point ; on peut même montrer qu'elle est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *car elle est développable en série entière sur* $]-1,1[$), et elle est donc (la seule) solution de **(E)** sur $]-1,+\infty[$.

c. On fait $y' = 0$ dans l'équation **(E)**, il reste alors $y = \dfrac{1}{1+x}$: tous les points à tangente horizontale ($y' = 0$) sur les courbes intégrales de **(E)** se situent donc sur l'hyperbole **(H)** d'équation $y = \dfrac{1}{1+x}$. Réciproquement, en tout point (x,y) de cette hyperbole **(H)**, sauf le point $(0,1)$, d'après le théorème de Cauchy, il passe une courbe intégrale de **(E)** pour laquelle on a $x(1+x)y' = 0$, donc $y' = 0$, c'est-à-dire présence d'une tangente horizontale.

On observera sur le schéma l'hyperbole **(H)**, *en rouge, lieu des points à tangente horizontale. On notera aussi la courbe intégrale de l'unique fonction solution sur* $]-1,+\infty[$, *elle croise l'hyperbole* **(H)** *en le point de coordonnées* $(0,1)$, *où elle n'admet d'ailleurs pas de tangente horizontale.*



---

2. Résoudre, sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation différentielle $y' - (\tan x)y + \cos^2 x = 0$.

- -

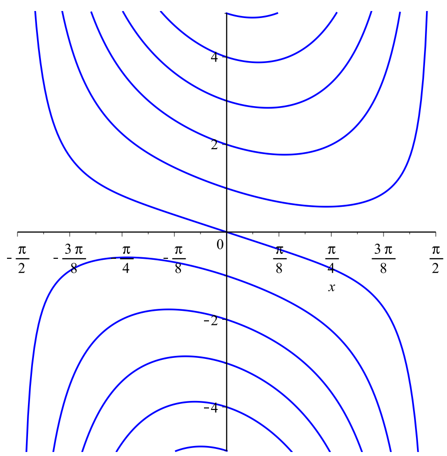
On peut commencer par résoudre l'équation homogène associée $y' = \tan(x) \cdot y = -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)} y$, dont on sait que les solutions sur I sont les fonctions $y_H : x \mapsto \lambda\, e^{-\ln(\cos x)} = \frac{\lambda}{\cos(x)}$, avec λ réel.

On applique alors la méthode de variation de la constante, qui consiste à rechercher les solutions de **(E)** sous la forme $y(x) = \frac{\lambda(x)}{\cos(x)}$, où λ est une nouvelle fonction inconnue, supposée de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On dérive et on réinjecte dans **(E)**. Après simplification, il reste $\lambda'(x) = -\cos^3(x)$, fonction dont il ne reste plus qu'à chercher des primitives. C'est facile (pas besoin de linéariser!) puisque $-\cos^3(x) = \cos(x) \cdot (\sin^2 x - 1)$, on obtient donc immédiatement $\lambda(x) = \frac{1}{3}\sin^3(x) - \sin(x) + C$, soit

$$y(x) = \frac{1}{3}\frac{\sin^3(x)}{\cos(x)} - \tan(x) + \frac{C}{\cos(x)} \quad , \qquad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}\,.$$

Remarque. On peut aussi remarquer que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}) \quad & \iff \quad \frac{\cos(x)\, y'(x) - \sin(x)\, y(x)}{\cos(x)} = -\cos^2(x) \\
& \iff \quad \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\cos(x)\, y(x)\big) = -\cos^2(x) \\
& \iff \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\cos(x)\, y(x)\big) = -\cos^3(x) \\
& \iff \quad \cos(x)\, y(x) = \frac{1}{3}\sin^3(x) - \sin(x) + C \\
& \iff \quad y(x) = \frac{1}{3}\frac{\sin^3(x)}{\cos(x)} - \tan(x) + \frac{C}{\cos(x)} \ .
\end{aligned}$$



---

3. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$. On étudie l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) : \qquad y' + \alpha y = f(t) \ .$$

a. Montrer que, si y est solution de **(E)** sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $t \mapsto y(t+T)$ est aussi solution de **(E)**.

b. En déduire qu'une solution y de **(E)** est T-périodique si et seulement si $y(T) = y(0)$.

c. Montrer que l'équation **(E)** admet une unique solution T-périodique, sauf pour des valeurs exceptionnelles de α que l'on précisera.

- -

a. Posons $z(t) = y(t+T)$ avec y solution de **(E)**. Alors z est de classe $\mathcal{C}^1$ comme y, et $z'(t) = y'(t+T)$. Donc

$$z'(t) + \alpha z(t) = y'(t+T) + \alpha y(t+T) = f(t+T) = f(t) \ ,$$

et z est aussi solution de **(E)**.

b. Si y est T-périodique, alors $y(T) = y(0)$, ce sens est évident.

Si $y(T) = y(0)$, alors $z(0) = y(0)$, les fonctions y et $z : t \mapsto y(t+T)$ sont solutions d'un même problème de Cauchy d'après **a.**, donc $z = y$ d'après le cours, ce qui montre que y est T-périodique.

c. Soit y_P une solution "particulière" de **(E)**, alors les solutions de **(E)** sont les fonctions $y : t \mapsto y_P(t) + C\, e^{\alpha t}$. Une telle solution y de **(E)** est T-périodique si et seulement si $y(T) = y(0)$, i.e. si et seulement si $y_P(T) + C\, e^{-\alpha T} = y_P(0) + C$, soit si et seulement si

$$\left(1 - e^{-\alpha T}\right) C = y_P(T) - y_P(0)\ .$$

Si $1 - e^{-\alpha T} \neq 0$, i.e. si $\alpha \neq \dfrac{2ik\pi}{T}$ avec $k \in \mathbf{Z}$, alors la constante arbitraire C est déterminée de façon unique, et il y a bien alors une et une seule solution T-périodique de **(E)**.

Remarque. Si α est l'une des valeurs "exceptionnelles" $\dfrac{2ik\pi}{T}$ avec $k \in \mathbf{Z}$ alors, soit toutes les solutions de **(E)** sont T-périodiques, soit aucune ne l'est.

---

4. Soit α un réel. En discutant selon α, déterminer la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_\alpha$ des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathbf{E}_\alpha)$: $\quad xy' - \alpha y = 0$.

- -

Sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, l'équation peut se mettre "sous forme normale" $y' = \dfrac{\alpha}{x} y$ et admet alors pour solutions les fonctions de la forme $x \mapsto C\,|x|^\alpha$ avec C réel.

Notons maintenant $\mathcal{S}_\alpha$ l'ensemble des solutions de $(\mathbf{E}_\alpha)$ sur $\mathbb{R}$, c'est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Si $y \in \mathcal{S}_\alpha$, alors il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que $y(x) = C_1\,(-x)^\alpha$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $y(x) = C_2\, x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On cherche si l'on peut construire à partir de cela une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

• Si $\alpha < 0$, on a $\lim\limits_{x \to 0} |x|^\alpha = +\infty$. La fonction ci-dessus ne peut être prolongée par continuité en 0 que si $C_1 = C_2 = 0$, auquel cas y est la fonction nulle, qui est évidemment solution, donc $\mathcal{S}_\alpha = \{0\}$.

• Si $\alpha = 0$, alors y est constante sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, et ne peut être prolongée par continuité en 0 que si $C_1 = C_2$, auquel cas y est constante sur $\mathbb{R}$ et est donc solution. Donc $\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}(1)$ est l'ensemble des fonctions constantes.

• Si $0 < \alpha < 1$, alors $y' = C_2 \alpha x^{\alpha - 1}$ a une limite infinie en 0^+ si la constante C_2 est non nulle. De même en 0^- si la constante C_1 est non nulle. La seule fonction que l'on peut prolonger en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ correspond à $C_1 = C_2 = 0$, on a donc ici encore $\mathcal{S}_\alpha = \{0\}$.

• Si $\alpha = 1$, on a $y(x) = -C_1 x$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $y(x) = C_2 x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On peut prolonger en une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $C_1 = -C_2$, ce qui donne $y = C_1 x$ sur $\mathbb{R}$, fonction évidemment solution. Donc $\mathcal{S}_1 = \mathrm{Vect}(x \mapsto x)$.

• Enfin, si $\alpha > 1$, quelles que soient les constantes C_1 et C_2 choisies, en posant $y(0) = 0$, on a une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation: en effet, aussi bien y que sa dérivée y' tendent vers 0 en 0, et on conclut grâce au théorème de la limite de la dérivée. On a alors $\mathcal{S}_\alpha = \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$, où y_1 et y_2 sont définies par:

$$y_1(x) = \begin{cases} (-x)^\alpha & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad ; \qquad y_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^\alpha & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} .$$

Bilan: $\dim(\mathcal{S}_\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha < 0 \text{ ou } 0 < \alpha < 1 \\ 1 & \text{si} \quad \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 1 \\ 2 & \text{si} \quad \alpha > 1 \end{cases}$.

---

5. Soit l'équation différentielle $\quad(\mathbf{E}) \ : \ y' - ay = b(x)$, avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonction continue et bornée. Montrer que l'équation **(E)** admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}_+$. *On exprimera les solutions sous forme intégrale.*

- -

On recherche une expression intégrale des solutions de l'équation **(E)**. Pour cela, on fait le changement de fonction inconnue $y(x) = z(x)\, e^{ax}$ (c'est la méthode de variation de la constante) et on a alors

$$(\mathbf{E}) \iff z'(x) = b(x)\, e^{-ax} .$$

La fonction $x \mapsto b(x)\, e^{-ax}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car elle est majorée en valeur absolue par $\|b\|_\infty\, e^{-ax}$, on peut donc choisir pour primitive $x \mapsto -\displaystyle\int_x^{+\infty} b(t)\, e^{-at}\, \mathrm{d}t$. Les solutions de **(E)** s'expriment alors sous la forme $y(x) = y_0(x) + C\, e^{ax}$, en posant

$$y_0(x) = -e^{ax} \int_x^{+\infty} b(t)\, e^{-at}\, \mathrm{d}t .$$

La fonction y_0 est bornée sur $\mathbb{R}_+$ puisque

$$|y_0(x)| = e^{ax} \left| \int_x^{+\infty} b(t)\, e^{-at}\, \mathrm{d}t \right| \leq \|b\|_\infty\, e^{ax} \int_x^{+\infty} e^{-at}\, \mathrm{d}t = \frac{\|b\|_\infty}{a} .$$

La fonction $x \mapsto C\, e^{ax}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement $C = 0$. La seule solution de **(E)** qui soit bornée sur $\mathbb{R}_+$ est donc la fonction y_0.

Équations linéaires scalaires d'ordre deux.

6. En recherchant les solutions développables en série entière, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1 + x^2)\, y'' + 4x\, y' + 2y = 0 .$$

- -

Bof, à bas les calculs, soyons astucieux!

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}) \quad &\iff \quad \big((1+x^2)y'' + 2xy'\big) + 2\,\big(xy' + y\big) = 0 \\ &\iff \quad \big((1+x^2)y'\big)' + 2\,(xy)' = 0 \\ &\iff \quad (1+x^2)y' + 2xy = C \\ &\iff \quad \big((1+x^2)y\big)' = C \end{aligned}$$

$$\iff \quad (1+x^2)y = Cx + D$$
$$\iff \quad y = \frac{Cx+D}{1+x^2}\ ,$$

où C et D sont deux constantes arbitraires.

Remarque. En recherchant des solutions sous la forme $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R,R[$ avec $R>0$, on trouve qu'une CNS pour que y soit solution est que l'on ait $a_{n+2} = -a_n$ pour tout n, donc a_0 et a_1 sont arbitraires et on a $a_{2p} = (-1)^p a_0$ et $a_{2p+1} = (-1)^p a_1$ pour tout p entier naturel. En dehors de la solution nulle, les séries entières obtenues ont pour rayon de convergence 1, et on obtient ainsi les fonctions $y = \frac{Cx+D}{1+x^2}$ comme solutions de l'équadiff sur $]-1,1[$. On vérifie ensuite, en réinjectant, que ces fonctions sont solutions sur $\mathbb{R}$, et ce sont les seules puisque le théorème de Cauchy linéaire nous dit que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un plan vectoriel.

---

7. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' - 2y' + y = |x| \\ y(1) = 3\ ;\ y'(1) = 1 \end{cases}$.

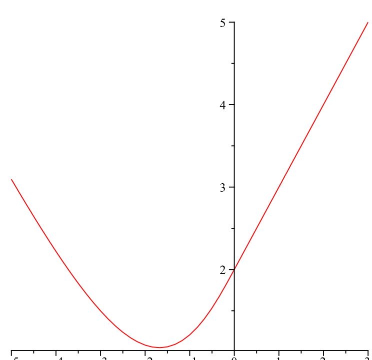
- -

D'après le théorème de Cauchy linéaire, la fonction second membre $x \mapsto |x|$ (ainsi que les coefficients qui sont constants) étant des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, ce problème de Cauchy admet une solution unique, qui sera une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

On résout d'abord sur $\mathbb{R}_+$, l'équation étant $y'' - 2y' + y = x$, on trouve la solution unique $y = x+2$, en tenant compte des conditions initiales imposées. Cette solution vérifie $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$.

On "recolle" donc en résolvant sur $\mathbb{R}_-$ le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' - 2y' + y = -x \\ y(0) = 2\ ;\ y'(0) = 1 \end{cases}$, qui admet pour unique solution (*calculs laissés à l'estimable lecteur*) : $y = (4-2x)\,e^x - x - 2$.

La solution du problème posé est donc la fonction $y : x \mapsto \begin{cases} (4-2x)\,e^x - x - 2 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x+2 & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$.



---

8. Soit l'équation différentielle **(E)** : $xy'' + 2y' + xy = 0$.

a. Rechercher les solutions de **(E)** développables en série entière.

b. Donner les solutions de **(E)** sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}$. *On cherchera les solutions sous la forme $y = zy_0$, où y_0 est une solution non nulle obtenue en* **a.** *et z est une fonction inconnue supposée de classe $\mathcal{C}^2$.*

c. Vérifier les résultats du **b.** en utilisant un changement de fonction inconnue.

- -

a. Posons $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, dérivons deux fois et réinjectons :

$$\begin{aligned}
\textbf{(E)} \quad &\iff \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = 0 \\
&\iff \quad \begin{cases} 2a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

(identification des coefficients grâce à l'unicité du développement en série entière). Donc $a_1 = 0$ et, pour tout $n \geq 2$, on a $a_n = -\dfrac{1}{n(n+1)}\, a_{n-2}$; on en déduit que

$$\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N} \quad a_{2p+1} = 0 \\ \forall p \in \mathbb{N} \quad a_{2p} = \dfrac{(-1)^p}{(2p+1)!}\, a_0 \end{cases} .$$

On en déduit un rayon de convergence infini et l'expression de y :

$$y = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\, x^{2p} = a_0\, \frac{\sin x}{x} = a_0 \,\mathrm{sinc}(x) .$$

(fonction "sinus cardinal").

b. Posons $y_0 = \mathrm{sinc}$ et recherchons les solutions de **(E)** sous la forme $y = z\, y_0$, où z est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$ (cette méthode "de variation de la constante", en fait hors programme, est a priori valable sur un intervalle sur lequel la fonction y_0 ne s'annule pas, disons ici sur $I_k =]k\pi, (k+1)\pi[$ avec k entier relatif). On dérive deux fois, on réinjecte et, après calculs, il reste l'équation $x\,y_0\,z'' + 2\,(x\,y_0' + y_0)\,z' = 0$, soit $(\sin x)\,z'' + (2\cos x)\,z' = 0$, ce qui donne, sur chaque intervalle I_k, $z' = \dfrac{C_1}{\sin^2 x}$, puis $z = C_1\,\dfrac{\cos x}{\sin x} + C_2$. On en déduit enfin

$$y = C_1\,\frac{\cos x}{x} + C_2\,\frac{\sin x}{x} ,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires. En toute rigueur, nous avons ici l'expression des solutions de **(E)** sur chaque intervalle I_k, mais en fait le théorème de Cauchy s'applique sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, et nous dit que , sur chacun de ces deux intervalles, l'ensemble des solutions est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension deux. Sur $\mathbb{R}_-^*$ comme sur $\mathbb{R}_+^*$, les fonctions $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

et $x \mapsto \dfrac{\cos x}{x}$ constituent donc une base de l'espace vectoriel des solutions. En étudiant les problèmes de raccordement en zéro (prolongement $\mathcal{C}^2$), on voit que les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto C\,\dfrac{\sin x}{x}$ et constituent donc un e.v. de dimension 1. Notons au passage que la fonction "sinus cardinal" est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car elle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, *cf.* question **a.**

c. Vu ce qu'on obtient en **b.**, on se dit que la fonction z définie par $z(x) = x\,y(x)$ doit vérifier une équation différentielle plus simple. On pose alors le changement de fonction inconnue $y = \dfrac{z}{x}$, on dérive deux fois, on réinjecte dans **(E)** et on tombe effectivement (calculs laissés au lecteur intrépide) sur l'équation $z'' + z = 0$, et on est contents. Non ?

---

9. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $xy'' - y' + 8x^3 y = x^3 \cos(\sqrt{2}x^2)$. *On pourra effectuer le changement de variable* $t = x^2$.

- -

On pose $t = x^2$, soit $x = \sqrt{t}$. Alors notons $y = f(x) = g(x^2) = g(t)$, ce qui donne $f'(x) = 2x\,g'(x^2) = 2\sqrt{t}\,g'(t)$, puis

$$y'' = f''(x) = 2\,g'(x^2) + 4x^2\,g''(x^2) = 2\,g'(t) + 4t\,g''(t)\ .$$

En réinjectant dans l'équation, après quelques calculs simples, on est ramené à l'équation

$$(\mathbf{F}) \quad : \qquad g''(t) + 2\,g(t) = \frac{1}{4}\,\cos(\sqrt{2}\,t)\ .$$

L'équation sans second membre associée admet pour solutions

$$g_H(t) = A\,\cos(\sqrt{2}\,t) + B\,\sin(\sqrt{2}\,t)\ .$$

Une solution particulière de **(F)** est $g_0(t) = \dfrac{1}{8\sqrt{2}}\,t\,\sin(\sqrt{2}\,t)$ (*cf.* cours de première année, oscillateur harmonique forcé, la pulsation excitatrice étant égale à la pulsation propre de l'oscillateur, i.e. situation de résonance). On récapitule :

$$y = f(x) = A\,\cos(\sqrt{2}\,x^2) + \left(B + \frac{x^2}{8\sqrt{2}}\right)\,\sin(\sqrt{2}\,x^2)\ .$$

---

10. En posant $z = e^{x^2} y$, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' + 4x\,y' + (3 + 4x^2)\,y = 0\ .$$

- -

On pose donc $y(x) = e^{-x^2}\,z(x)$, où z est une nouvelle fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Alors

$$y' = (z' - 2xz)\,e^{-x^2}\ ,$$

puis

$$y'' = \big(z'' - 4xz' + (4x^2 - 2)z\big)\,e^{-x^2}\ ,$$

que l'on réinjecte dans l'équation de départ, qui est ainsi transformée en $z'' + z = 0$. Les solutions sont donc

$$z(x) = A\ \cos(x) + B\ \sin(x)\ ,$$

puis

$$y(x) = \big(A\ \cos(x) + B\ \sin(x)\big)\ e^{-x^2}\ ,$$

où A et B sont deux constantes réelles arbitraires.

---

11. Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle $x^3 y'' + xy' - y = 0$. *On commencera par chercher une solution polynomiale non nulle.*

- -

On observe que $y = x$ est solution. On fait alors une variation de la constante (méthode de Lagrange) en posant le changement de fonction inconnue $y(x) = x\ z(x)$. Cela donne $y' = z + xz'$, puis $y'' = 2z' + xz''$, on réinjecte dans l'équation qui, après une petite simplification, devient

$$x^2\ z'' + (2x+1)\ z' = 0\ .$$

En posant $Z = z'$, on est ramené à une équation du premier ordre $x^2\ Z' + (2x+1)\ Z = 0$, ou encore $Z' = \Big(-\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}\Big)\ Z$, qui se résout sur $\mathbb{R}_+^*$ en $Z = -C\ e^{-2\ \ln(x) + \frac{1}{x}} = -\dfrac{C}{x^2}\ e^{\frac{1}{x}}$, que l'on intègre enfin en $z(x) = C\ e^{\frac{1}{x}} + D$. Au final, $y(x) = Cx\ e^{\frac{1}{x}} + Dx$, où C et D sont deux constantes arbitraires.

---

12. Résoudre, sur $]0,1[$, l'équation différentielle $x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$. *On commencera par chercher une solution développable en série entière dans un voisinage de 0.*

- -

• Posons $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-r, r[$ avec $r > 0$. Alors y est solution de l'équation différentielle proposée sur $]-r, r[$ si et seulement si

$$\forall x \in\,]-r, r[\qquad a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)^2\ (a_n - a_{n-1})\ x^n = 0$$

(*le lecteur s'empressera de vérifier les calculs*), soit si et seulement si

$$a_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 2 \quad a_n = a_{n-1}\ .$$

Les solutions DSE sont donc de la forme $y = a_1 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = a_1\ \frac{x}{1-x}$, où le coefficient a_1 est arbitraire, et le rayon de convergence étant 1, ceci vaut sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

• Le théorème de Cauchy linéaire nous indique que l'ensemble des solutions de l'équation sur $]0,1[$ est un plan vectoriel. La fonction $y_1 = \dfrac{x}{1-x}$ ne s'annulant pas sur cet intervalle, nous trouverons toutes les solutions en posant le changement de fonction inconnue $y = y_1 z$ avec z de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, 1[$ (méthode de Lagrange). On a donc

$$y' = y_1 z' + y_1' z \quad \text{et} \quad y'' = y_1 z'' + 2y_1' z' + y_1'' z \ ,$$

on réinjecte et, après quelques simplifications, il nous reste l'équation

$$x(1-x)y_1\, z'' + \big(2x(1-x)y_1' - (1+x)y_1\big)z' = 0 \ .$$

En remplaçant y_1 et y_1' par leurs expressions, et en posant $Z = z'$, on arrive (*après simplifications*) à l'équation du premier ordre $xZ' + Z = 0$, soit $(xZ)' = 0$, soit $xZ = C$, soit $Z = z' = \dfrac{C}{x}$, donc $z = C\ \ln(x) + D$, et enfin

$$y(x) = \big(C\ \ln(x) + D\big)\ \frac{x}{1-x}\ , \quad \text{avec} \quad (C, D) \in \mathbb{R}^2\ .$$

---

13. À l'aide du changement de variable $x = \tan t$, résoudre, sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}): \qquad (1+x^2)^2\, y'' + 2(x-1)(1+x^2)\, y' + y = 0\ .$$

- -

Posons $y(x) = z(t) = z(\mathrm{Arctan}\, x)$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Comme $z(t) = y(\tan t)$, la fonction z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. On dérive donc deux fois, cela donne $y'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\, z'(\mathrm{Arctan}\, x)$, puis

$$y''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\, z'(\mathrm{Arctan}\, x) + \frac{1}{(1+x^2)^2}\, z''(\mathrm{Arctan}\, x)$$

et, en réinjectant dans l'équation **(E)**, après simplifications, on obtient l'équation

$$(\mathbf{E}'): \qquad z''(t) - 2\, z'(t) + z(t) = 0\ ,$$

équation qui est à coefficients constants. L'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$ admet 1 pour racine double, on a donc $z(t) = (At + B)e^t$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, soit

$$y(x) = (A\ \mathrm{Arctan}\, x + B)\, e^{\mathrm{Arctan}\, x} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}\ .$$

---

14. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Soit $\Phi : E \to E$ définie par $\Phi(f) = g$, où, pour tout x réel, on pose

$$g(x) = \Phi(f)(x) = f'(x) - x\, f(x)\ .$$

a. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b. Déterminer les éléments propres de Φ.

c. Déterminer le noyau de Φ^2.

- -

a. L'application Φ est linéaire et va de E dans E, c'est évident.

b. Soit λ réel. On a $\Phi(f) = \lambda f$ si et seulement si f est solution de l'équation différentielle $y' - (x+\lambda)y = 0$, autrement dit **ssi** f est de la forme $x \mapsto C\, e^{\frac{x^2}{2}+\lambda x}$, avec $C \in \mathbb{R}$. On en déduit que tous les réels sont valeurs propres de Φ et que les sous-espaces propres $E_\lambda(\Phi)$ sont des droites vectorielles. Plus précisément, $E_\lambda(\Phi) = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}+\lambda x}\right)$.

c. On remarque que $f \in \mathrm{Ker}(\Phi^2)$ **ssi** $\Phi(f) \in \mathrm{Ker}(\Phi) = E_0(\Phi)$, donc **ssi** la fonction $\Phi(f)$ est de la forme $x \mapsto C_1 e^{\frac{x^2}{2}}$, donc **ssi** f est solution d'une équation différentielle de la forme $y' - xy = C_1 e^{\frac{x^2}{2}}$ où C_1 est une constante arbitraire. Cette équation est linéaire du premier ordre avec second membre, les solutions de l'équation homogène étant de nouveau de la forme $x \mapsto K e^{\frac{x^2}{2}}$, résolvons-la par la méthode de variation de la constante en cherchant ses solutions sous la forme $y = z(x)\, e^{\frac{x^2}{2}}$ avec z fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^1$. On trouve alors $z(x) = C_1 x + C_2$, soit $y = f(x) = (C_1 x + C_2)\, e^{\frac{x^2}{2}}$, où C_2 est une nouvelle constante arbitraire. On peut conclure: $\mathrm{Ker}(\Phi^2)$ est le plan vectoriel $\mathrm{Vect}\left(x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}}\ ,\ x \mapsto x\, e^{\frac{x^2}{2}}\right)$.

Remarque. On peut aussi expliciter $\Phi^2(f)$, on obtient

$$\Phi^2(f)(x) = \big(\Phi(f)\big)'(x) - x\,\Phi(f)(x) \ = \ f''(x) - 2x\, f'(x) + (x^2-1)\, f(x)\ .$$

On a ainsi résolu l'équation différentielle (linéaire du second ordre homogène à coefficients non constants) : $y'' - 2xy' + (x^2-1)y = 0$, et on constate que l'ensemble des solutions est un plan vectoriel, conformément au cours (conséquence du théorème de Cauchy linéaire).

---

15. Soient $a, b : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues, soient f_1 et f_2 deux fonctions solutions sur I de l'équation différentielle

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0\ .$$

Pour $x \in I$, on pose $w(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}$. Montrer que w et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et que w est solution sur I d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on précisera.

- -

Les fonctions f_1 et f_2 sont de classe $\mathcal{C}^2$, donc $w = f_1 f_2' - f_2 f_1'$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, avec

$$w' = f_1' f_2' + f_1 f_2'' - f_2' f_1' - f_2 f_1'' = f_1\,(-a f_2' - b f_2) - f_2\,(-a f_1' - b f_1)\ ,$$

soit $w' = -a\,(f_1 f_2' - f_2 f_1') = -aw$. Donc le "wronskien" w est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y' + a(x) y = 0$.

---

16. Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, positive, non identiquement nulle. Soit f une fonction solution de l'équation différentielle **(E):** $y'' + q(x)\, y = 0$. On suppose que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

a. On suppose $f > 0$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que la courbe représentative de f est située en-dessous de chacune de ses tangentes. En déduire une contradiction.

b. Adapter la question précédente au cas où $f < 0$ sur $\mathbb{R}$.

c. Énoncer le résultat que l'on a démontré concernant les solutions de l'équation **(E)**.

- -

a. Si $f > 0$, alors $f'' = -qf \leq 0$, la fonction f est alors concave, donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est située en-dessous de chacune de ses tangentes.

Il existe un point a en lequel $f'(a)$ est non nul (*sinon, f est constante sur* $\mathbb{R}$, $f(x) = C$, *mézalor* $f''(x) + q(x)f(x) = C\,q(x) = 0$ *donc* $C = 0$ *puisque q n'est pas la fonction nulle, et ceci est contraire à l'hypothèse posée* $f > 0$). Une fois choisi un tel point a, on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) \leq f(a) + (x-a)\,f'(a)\ ,$$

et f aurait donc pour limite $-\infty$, en $-\infty$ si $f'(a) > 0$, ou en $+\infty$ si $f'(a) < 0$, ce qui contredit l'hypothèse $f > 0$.

b. Bah on remplace f par $-f$ qui est aussi solution de **(E)**.

c. Si f ne s'annule pas, comme elle est continue (puisque au moins de classe $\mathcal{C}^2$), elle est alors de signe constant strictement, et ceci est impossible d'après les questions **a.** et **b.**

On a donc prouvé que toute fonction solution de **(E)** s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Problèmes se ramenant à une équation différentielle

17. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) + f(-x) = x + \cos x\ .$$

On pourra écrire f sous la forme $f = g + h$, avec g paire et h impaire.

- -

On rappelle que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se décompose de façon unique en $f = g + h$, avec g paire et h impaire, en posant précisément

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad ; \qquad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}\ .$$

Cela signifie aussi que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$, en notant $\mathcal{P}$ le s.e.v. des fonctions paires et $\mathcal{I}$ le s.e.v. des fonctions impaires.

En décomposant f de cette façon et en séparant les parties paire et impaire (qui sont aussi de classe $\mathcal{C}^2$) dans l'équation obtenue, on se ramène à deux équations différentielles indépendantes $\begin{cases} g''(x) + g(x) = \cos x \\ h''(x) + h(x) = x \end{cases}$. L'équation $g''(x) + g(x) = \cos x$ admet pour solutions $g(x) = a\,\cos x + b\,\sin x + \dfrac{x}{2}\,\sin x$, mais on ne doit en conserver que les solutions paires ; l'équation $h''(x) + h(x) = x$ admet pour solutions $h(x) = \lambda\,\mathrm{ch}\,x + \mu\,\mathrm{sh}\,x - x$, mais on n'en conserve que les solutions impaires. Au final, les fonctions f solutions du problème posé sont

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}\,x\,\sin x - x + a\,\cos x + \mu\,\mathrm{sh}\,x \qquad , \quad (a, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

---

18. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodiques, de classe $\mathcal{C}^1$, vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = f(x-\pi) + \sin x \ .$$

- -

Si f, de classe $\mathcal{C}^1$, vérifie cette équation fonctionnelle **(E)**, alors f' est $\mathcal{C}^1$, donc f est $\mathcal{C}^2$ (on peut montrer en fait que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, en prouvant par récurrence qu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k). On peut donc redériver l'équation, ce qui donne

$$f''(x) = f'(x-\pi) + \cos x = f(x-2\pi) + \sin(x-\pi) + \cos x = f(x) + \cos x - \sin x \ .$$

Donc f est solution de l'équation différentielle $y'' - y = \cos x - \sin x$. La solution générale de l'équation sans second membre $y'' - y = 0$ est $y = A\,e^x + B\,e^{-x}$. Une solution particulière (évidente!!) de l'équation $y'' - y = \cos x$ est $y_1 = -\dfrac{1}{2}\cos x$. Une solution particulière (évidente!!) de l'équation $y'' - y = -\sin x$ est $y_1 = \dfrac{1}{2}\sin x$. La fonction f est donc de la forme $f(x) = A\,e^x + B\,e^{-x} + \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x)$. Mais on a raisonné ici par conditions nécessaires, il n'est donc pas du tout sûr que toute fonction de cette forme soit solution de **(E)**. Il est même évident que c'est faux puisque les fonctions recherchées doivent être 2π-périodiques.

Réciproque : posons $f(x) = A\,e^x + B\,e^{-x} + \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x)$. On a alors

$$f(x+2\pi) = A\,e^{2\pi}\,e^x + B\,e^{-2\pi}\,e^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) \ .$$

En écrivant que $f(x+2\pi) = f(x)$ pour tout x, les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ étant linéairement indépendantes, on déduit que $A = B = 0$, donc $f(x) = \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x)$; on vérifie que l'on a bien alors $f'(x) = f(x-\pi) + \sin x$. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}(\sin x - \cos x)$ est donc la seule solution du problème posé.

---

19. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues, telles que

$$\textbf{(*)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) + \int_0^x (x-t)\,f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - x \ .$$

- -

Si f, supposée continue, vérifie **(*)**, alors $f(x) = 1 - x - x\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x t f(t)\mathrm{d}t$, puis par le théorème fondamental de l'analyse, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, après simplifications, **(**) :** $f'(x) = -1 - \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Du coup, f est de classe $\mathcal{C}^2$ puisque f' est $\mathcal{C}^1$, et $f''(x) = -f(x)$. Donc f est de la forme $f(x) = A\,\cos(x) + B\,\sin(x)$.

En évaluant **(*)** et **(**)** pour $x = 0$, on obtient les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$, on en déduit $A = 1$ et $B = -1$, donc nécessairement

$$f(x) = \cos(x) - \sin(x)\ .$$

Réciproquement, on vérifie que cette fonction convient.

Remarque. Comme cette dernière vérification n'est pas très agréable, on peut préférer raisonner par équivalences, en utilisant le fait que, si g et h sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, on a l'équivalence

$$f = g \iff \begin{cases} f' = g' \\ f(0) = g(0) \end{cases}\ .$$

On commence alors par montrer (*cf.* début du raisonnement ci-dessus) qu'une fonction f solution de **(*)** est nécessairement au moins deux fois dérivable. Ensuite, on écrit que

$$\textbf{(*)} \iff \begin{cases} \textbf{(**)} \\ f(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} f'' + f = 0 \\ f(0) = 1 \\ f'(0) = -1 \end{cases}\ .$$

On est ainsi ramené à un problème de Cauchy dont l'unique solution est la fonction $f : x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$.

Dérivation des fonctions vecteorielles

20. Soit E un espace euclidien, soit $f : [a,b] \to E$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, de dérivée bornée sur $]a,b[$: $\quad \exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall t \in]a,b[\quad \|f'(t)\| \leq M$. En considérant l'application $\varphi : t \mapsto \big(f(b) - f(a) | f(t)\big)$, montrer l'inégalité

$$\big\|f(b) - f(a)\big\| \leq M(b-a)\ .$$

- -

L'application φ proposée est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, à valeurs réelles. Pour $t \in]a,b[$, on a $\ \varphi'(t) = \big(f(b) - f(a) | f'(t)\big)\ $ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\forall t \in]a,b[\qquad \big|\varphi'(t)\big| = \Big|\big(f(b) - f(a) | f'(t)\big)\Big| \leq \big\|f(b) - f(a)\big\|\ \big\|f'(t)\big\| \leq M\ \big\|f(b) - f(a)\big\|\ .$$

L'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs réelles donne alors

$$\big\|f(b) - f(a)\big\|^2 = \big|\varphi(b) - \varphi(a)\big| \leq M\ \big\|f(b) - f(a)\big\|\ (b-a)\ .$$

Si $\big\|f(b) - f(a)\big\| > 0$, on simplifie par cette quantité et on obtient l'inégalité demandée. Si $\big\|f(b) - f(a)\big\| = 0$, l'inégalité à démontrer est triviale.

---

21. Soit E un espace euclidien, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\forall t \in I \quad f(t) \neq 0$. On pose $\varphi(t) = \|f(t)\|$ pour tout $t \in I$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, et calculer φ' et φ''.

Réponse partielle. On obtient $\varphi'(t) = \dfrac{\big(f(t) | f'(t)\big)}{\|f(t)\|}$.

- -

- -

Posons $q(t) = \|f(t)\|^2 = \big(f(t)|f(t)\big)$, alors q est de classe $\mathcal{C}^2$ et $q'(t) = 2\,\big(f(t)|f'(t)\big)$. Comme $\varphi(t) = \sqrt{q(t)}$ avec $q(t) > 0$ pour tout t, alors φ est de classe $\mathcal{C}^2$ par composition et

$$\varphi'(t) = \frac{q't)}{2\sqrt{q(t)}} = \frac{\big(f(t)|f'(t)\big)}{\|f(t)\|}\ .$$

On dérive une deuxième fois, on obtient

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= \frac{\Big(\|f'(t)\|^2 + \big(f(t)|f''(t)\big)\Big)\ \|f(t)\| - \big(f(t)|f'(t)\big)\ \dfrac{\big(f(t)|f'(t)\big)}{\|f(t)\|}}{\|f(t)\|^3} \\ &= \frac{\|f'(t)\|^2\ \|f(t)\|^2 + \big(f(t)|f''(t)\big)\ \|f(t)\|^2 - \big(f(t)|f'(t)\big)^2}{\|f(t)\|^3}\ .\end{aligned}$$

---

22. Soit $M : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad M(t)^\top\ M(t) = I_n\ ,$$

i.e. pour tout t réel, $M(t)$ est une matrice orthogonale.

Montrer que, pour tout t réel, la matrice $M'(t)$ est non inversible.

- -

Il résulte du cours sur la dérivation des fonctions vectorielles que, si $t \mapsto M(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $t \mapsto M(t)^\top$ est aussi dérivable, de dérivée $t \mapsto \big(M'(t)\big)^\top$. *Cela résulte de la linéarité de la transposition.* On peut donc dériver la relation $M(t)^\top M(t) = I_n$, ce qui donne $M'(t)^\top\ M(t) + M(t)^\top\ M'(t) = 0$. On a donc $\forall t \in \mathbb{R} \quad M'(t)^\top\ M(t) = -M(t)^\top\ M'(t)$. En prenant le déterminant, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \det\big(M'(t)\big)\ \det\big(M(t)\big) = (-1)^{2n+1}\ \det\big(M(t)\big)\ \det\big(M'(t)\big)\ ,$$

soit: $\det\big(M'(t)\big)\ \det\big(M(t)\big) = 0$. Mais le facteur $\det\big(M(t)\big)$ est non nul (il vaut 1 ou -1, puisque $M(t)$ est une matrice orthogonale), donc $\forall t \in \mathbb{R} \quad \det\big(M'(t)\big) = 0$, la matrice $M'(t)$ est non-inversible.

---

23. Soient u, v, w trois fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On suppose que $\begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0$.

- -

Posons $f(x) = \begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u(x) & v(x) & w(x) \end{vmatrix}$ pour $x \in [a,b]$. Alors $f(x) = \det_{\mathcal{B}_0}\big(V(b), V(a), V(x)\big)$, en posant $V(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ pour tout $x \in [a,b]$, et $\mathcal{B}_0$ base canonique de $\mathbb{R}^3$. La fonction vectorielle V est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I = [a,b]$, donc f est $\mathcal{C}^2$ sur I avec

$$\begin{aligned} f'(x) &= \det_{\mathcal{B}_0}\left(\overrightarrow{0}, V(a), V'(x)\right) + \det_{\mathcal{B}_0}\left(V(b), \overrightarrow{0}, V'(x)\right) + \det_{\mathcal{B}_0}\left(V(b), V(a), V'(x)\right) \\ &= \det_{\mathcal{B}_0}\left(V(b), V(a), V'(x)\right) = \begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u'(x) & v'(x) & w'(x) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

puis, par un calcul analogue, $f''(x) = \det_{\mathcal{B}_0}\left(V(b), V(a), V''(x)\right) = \begin{vmatrix} u(b) & v(b) & w(b) \\ u(a) & v(a) & w(a) \\ u''(x) & v''(x) & w''(x) \end{vmatrix}$.

On voit par ailleurs que $f(a) = f(b) = 0$ (deux lignes égales dans le déterminant). Par le théorème de Rolle, il existe alors $d \in]a,b[$ tel que $f'(d) = 0$. L'hypothèse de l'énoncé est que $f'(a) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction f', il existe alors $c \in]a,d[\subset]a,b[$ tel que $f''(c) = 0$, et c'est ce qu'il fallait démontrer.

Systèmes différentiels linéaires

24. Résoudre le système différentiel linéaire d'écriture matricielle $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pourra poser le changement de fonction inconnue $X(t) = e^t\, Y(t)$.

- -

On fait le changement de fonction inconnue $X(t) = e^t\, Y(t)$, et on a

$$(\mathbf{S}) \iff X' = AX \iff e^t\,(Y' + Y) = e^t\, AY \iff Y' = (A - I_4)\, Y \iff \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = 0 \end{cases}.$$

On en déduit $y_4 = C_1$, $y_3 = C_1 t + C_2$, $y_2 = C_1 \dfrac{t^2}{2} + C_2 t + C_3$, $y_1 = C_1 \dfrac{t^3}{6} + C_2 \dfrac{t^2}{2} + C_3 t + C_4$, et on trouve X en multipliant par e^t, soit

$$\begin{cases} x_1 = C_4\, e^t + C_3\, t\, e^t + C_2\, \dfrac{t^2}{2}\, e^t + C_1\, \dfrac{t^3}{6}\, e^t \\ x_2 = C_3\, e^t + C_2\, t\, e^t + C_1\, \dfrac{t^2}{2}\, e^t \\ x_3 = C_2\, e^t + C_1\, t\, e^t \\ x_4 = C_1\, e^t \end{cases},$$

où C_1, C_2, C_3 et C_4 sont des constantes arbitraires.

---

25. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' &= 2x - y - z \\ y' &= -x + 2y - z \\ z' &= -x - y + 2z \end{cases}.$

- -

Le système s'écrit $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. On observe que $A - 3I_3 = -J$, où $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1, on a donc $\mathrm{rg}(A - 3I_3) = 1$, donc $3 \in \mathrm{Sp}(A)$, et $\dim E_3(A) = 2$; en fait, il est assez clair que $E_3(A)$ est le plan d'équation $x + y + z = 0$, engendré par exemple par les vecteurs $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. L'autre valeur propre de A est 0 (considérer la trace), et le sous-espace $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, *on pouvait remarquer aussi que la somme des coefficients de chaque ligne est nulle*. On peut donc diagonaliser A, cela donne $A = PDP^{-1}$, avec $D = \mathrm{diag}(3,3,0)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

En posant $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, on a alors

$$\begin{aligned} X' = AX \quad &\Longleftrightarrow \quad X' = PDP^{-1}\,X \iff P^{-1}X' = D\,P^{-1}X \iff Y' = DY \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} u' &= 3u \\ v' &= 3v \\ w' &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u(t) &= C_1\,e^{3t} \\ v(t) &= C_2\,e^{3t} \\ w(t) &= C_3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Enfin, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = P \cdot Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, ce qui donne

$$\begin{cases} x(t) &= C_1\,e^{3t} + C_3 \\ y(t) &= (-C_1 + C_2)\,e^{3t} + C_3 \\ z(t) &= -C_2\,e^{3t} + C_3 \end{cases}.$$

---

26. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique

$$\forall (X,Y) \in \big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\big)^2 \qquad (X|Y) = X^\top Y$$

et de sa norme euclidienne canonique.

a. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Soit le système différentiel

$$\textbf{(S)}: \quad X'(t) = A\,X(t) \iff \begin{cases} x'(t) &= y(t) + 2z(t) \\ y'(t) &= -x(t) + 2z(t) \\ z'(t) &= -2x(t) - 2y(t) \end{cases}.$$

Soit $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ une fonction vectorielle solution du système **(S)**. On introduit les fonctions

$$f : t \mapsto 2x(t) - 2y(t) + z(t) \qquad \text{et} \qquad g : t \mapsto \big(x(t)\big)^2 + \big(y(t)\big)^2 + \big(z(t)\big)^2 .$$

Sans résoudre explicitement le système **(S)**, montrer que les fonctions f et g sont constantes sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique, soit X une solution du système différentiel $X' = AX$. Montrer que $t \mapsto \big\|X(t)\big\|$ est constante.

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non inversible. Montrer qu'il existe $L \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telle que $L^\top A = 0$. Montrer que l'ensemble $\big\{X(t) - X(0)\ ;\ t \in \mathbb{R}\big\}$ est inclus dans un hyperplan de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

- -

a. • Soit le vecteur $L = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $f(t) = L^\top X(t)$. Donc $f'(t) = L^\top X'(t) = L^\top A\,X(t)$, mais on observe que $L^\top A = 0_{1,3}$ (matrice-ligne nulle), donc $f'(t) = 0$ et f est constante.

Remarque. La relation $L^\top A = 0_{1,3}$ s'écrit aussi, en transposant, $A^\top L = 0_{3,1}$, autrement dit le vecteur-colonne L est vecteur propre de la matrice $A^\top$ pour la valeur propre 0, i.e. $L \in \mathrm{Ker}(A^\top)$.

• On a $g(t) = \big\|X(t)\big\|^2 = X(t)^\top X(t)$. Le cours sur les fonctions vectorielles permet de dériver g: en effet, la transposition $X \mapsto X^\top$ étant linéaire, on a $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(X(t)^\top\big) = X'(t)^\top$ par application de la formule $(L \circ f)' = L \circ f'$ avec L application linéaire. Donc

$$\begin{aligned} g'(t) &= X'(t)^\top X(t) + X(t)^\top X'(t) \\ &= \big(A\,X(t)\big)^\top X(t) + X(t)^\top A\,X(t) \\ &= X(t)^\top \big(A^\top + A\big)\,X(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisqu'on constate que la matrice A est antisymétrique: $A^\top + A = 0$. Donc g est constante.

b. C'est la même preuve que pour la fonction g de la question **a.**

c. Si A n'est pas inversible, alors $A^\top$ ne l'est pas non plus, il existe donc un vecteur-colonne $L \in \mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, non nul, tel que $A^\top L = 0_{n,1}$, donc en transposant, on a $L^\top A = 0_{1,n}$. Si X est une fonction vectorielle solution du système différentiel **(S)**, on a alors $L^\top A\,X(t) = 0$ pour tout t réel, soit $L^\top X'(t) = 0$, ce que l'on peut encore écrire $\big(L \mid X'(t)\big) = 0$.

Remarque. Si X est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$, on a $L^\top AX = (L|AX) = 0$, ce qui traduit l'inclusion $\mathrm{Im}(A) \subset H$, où H est l'hyperplan $\big(\mathrm{Vect}(L)\big)^\perp$ de vecteur normal L.

Le cours sur les fonctions vectorielles montre que $t \mapsto \big(L\,|\,X'(t)\big)$ est la dérivée de la fonction $f : t \mapsto \big(L \mid X(t)\big)$. Cette dernière fonction f est donc constante. On a donc $f(t) = f(0)$ pour tout t, soit $\big(L \mid X(t) - X(0)\big) = 0$, soit $X(t) - X(0) \in H = \big(\mathrm{Vect}(L)\big)^\perp$. La fonction f de la question **1.** est un cas particulier de ce qui précède.

Exercices avec Python

27. Soit l'équation différentielle **(E)**: $(1-x)^3\, y'' - y = 0$.

On note f l'unique solution de **(E)** sur $]-\infty, 1[$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

a. Justifier l'existence et l'unicité de f.

b. Tracer une approximation du graphe de f sur $[0\,;\,0,09]$ en utilisant la méthode d'Euler.

c. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$.

Pour tout n entier naturel, on pose $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

d. Pour $n \geq 1$, trouver une relation de récurrence liant les coefficients a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}.

e. Avec Python, calculer a_n pour $n \in [\![0, 20]\!]$.

f. Montrer que $|a_n[\leq 4^n$ pour tout n.

g. Que peut-on en déduire concernant la fonction f ?