Espaces probabilisés.

1. Déterminer une distribution de probabilités $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ sur l'ensemble $\Omega = [\![1, n]\!]$, telle que la probabilité de l'événement $[\![1, k]\!]$ soit proportionnelle à k^2.

2. Une urne contient des boules blanches et noires, en proportion p et q (avec $p + q = 1$). On procède à n tirages successifs avec remise.

a. Quelle est la probabilité pour que le n-ème tirage soit la première apparition d'une boule blanche ?

b. Quelle est la probabilité pour que le n-ème tirage soit la k-ème apparition d'une boule blanche (avec $k \in [\![1, n]\!]$ donné) ?

3. Une succession d'individus $A_1, \cdots, A_n$ se transmet une information binaire du type "oui" ou "non". Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçue avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son contraire avec la probabilité $q = 1 - p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres. Calculer la probabilité π_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1. Quelle est la limite de π_n quand n tend vers l'infini ?

4. Soient $A_1, \cdots, A_n$ des événements indépendants. Montrer que la probabilité pour qu'aucun d'eux ne soit réalisée est majorée par $M = \exp\Big(-\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\Big)$.

5. Une maladie touche une personne sur 10000. Un test sanguin, censé dépister cette maladie, donne un résultat positif chez 99% des malades, mais est aussi faussement positif chez 0,1% des personnes saines. Un individu passe ce test et le résultat est positif. Quelle est sa probabilité d'être malade ?

6.a. En considérant le coefficient de X^n dans le polynôme $P = (1 + X)^{2n} = (1 + X)^n(1 + X)^n$, démontrer la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

b. Deux joueurs jouent indépendamment n parties de pile ou face avec des pièces équilibrées. Quelle est la probabilité p_n pour qu'ils obtiennent le même nombre de fois "face" ?

c. On remarque que p_n est aussi la probabilité d'obtenir n fois "face" lors de $2n$ lancers. Pouvait-on s'en douter ?

d. Donner un équivalent de p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

7. Un groupe de n chasseurs tire simultanément et indépendamment sur n canards. Chaque chasseur ne tire qu'une seule fois et atteint toujours sa cible.

a. Quelle est la probabilité p_n qu'au moins un canard survive ? Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

b. L'un des canards s'appelle Saturnin. Quelle est la probablité q_n qu'il survive ? Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$.

Variables aléatoires.

8. Un archer tire successivement sur n cibles. À chaque tir, il a la probabilité p de toucher la cible et les tirs sont supposés indépendants. Il tire une première fois sur chaque cible et on note X le nombre de cibles atteintes lors de ce premier jet. L'archer tire ensuite une seconde fois sur les cibles restantes et l'on note Y le nombre de cibles touchées lors de cette tentative. Déterminer la loi de la variable $Z = X + Y$.

9. Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent des lois binomiales de tailles n et m et de même paramètre p. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Z = X + Y$?

10*. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un même espace probabilisé fini (Ω, P). On suppose que
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{E}(X^k) = \mathrm{E}(Y^k)\ .$$
Montrer que X et Y suivent la même loi. *On pourra considérer un polynôme de Lagrange prenant la valeur 1 sur l'un des réels appartenant à l'ensemble $X(\Omega) \cup Y(\Omega)$, et prenant la valeur 0 sur tous les autres éléments de cet ensemble.*

11. Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules dans celle-ci et on note X le nombre de boules rouges obtenues lors de ce tirage. Quelle est la loi de X, son espérance, sa variance ?

12. On considère une suite (X_k) de variables indépendantes, suivant chacune la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, et on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{n \to +\infty} P(S_n \leq m) = 0$.

13. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire n boules sans remise $(1 \leq n \leq N)$. On note X et Y le plus petit et le plus grand numéros obtenus.

a. Pour $k \in [\![1, N]\!]$, déterminer $P(X \geq k)$. En déduire la loi de X.

b. Pour $l \in [\![1, N]\!]$, déterminer $P(Y \leq l)$. En déduire la loi de Y.

c. Quelle est la loi conjointe du couple $U = (X, Y)$?

14. Marche aléatoire sur Z.

Un mobile se déplace sur un axe gradué. À l'instant 0, il est à l'origine. À chaque instant entier, son abscisse augmente d'une unité avec la probabilité p (on parle de pas vers la droite), et diminue d'une unité avec la probabilité $q = 1 - p$ (on parle de pas vers la gauche). On note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n.

a. Déterminer l'ensemble $X_n(\Omega)$.

b. On note D_n le nombre de pas vers la droite effectués par le mobile jusqu'à l'instant n. Quelle relation y a-t-il entre D_n et X_n?

c. Quelle est la loi de D_n ? En déduire la loi de X_n.

d. Calculer l'espérance et la variance de X_n.

15. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages avec remise dans cette urne et on note $X_1, \cdots, X_n$ les numéros obtenus. Soit $M_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire M_n, calculer son espérance. Calculer $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{E}(M_n)$. Pour n (nombre de tirages) fixé, donner un équivalent de $\mathrm{E}(M_n)$ lorsque N (le nombre de boules) tend vers l'infini.