Espaces probabilisés.

1. Déterminer une distribution de probabilités $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ sur l'ensemble $\Omega = [\![1,n]\!]$, telle que la probabilité de l'événement $[\![1,k]\!]$ soit proportionnelle à k^2.

- -

Une distribution de probabilités sur Ω est une suite finie $(p_i)_{1\leq i\leq n}$ de réels positifs telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. La probabilité associée sur Ω est alors définie par $P(I) = \displaystyle\sum_{i\in I} p_i$ pour toute partie I de Ω. Il doit, de plus, exister un réel α strictement positif tel que $P\big([\![1,k]\!]\big) = \alpha k^2$ pour tout k, soit $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} p_i = \alpha k^2$. Pour $k = n$, on voit que nécessairement $\alpha = \dfrac{1}{n^2}$. Puis, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$p_k = P\big(\{k\}\big) = P\big([\![1,k]\!]\big) - P\big([\![1,k-1]\!]\big) = \frac{1}{n^2}\left(k^2 - (k-1)^2\right) = \frac{2k-1}{n^2}\ .$$

Réciproquement, le lecteur est invité à vérifier que cette suite de nombres $(p_k)_{1\leq k\leq n}$ convient.

---

2. Une urne contient des boules blanches et noires, en proportion p et q (avec $p+q=1$). On procède à n tirages successifs avec remise.

a. Quelle est la probabilité pour que le n-ème tirage soit la première apparition d'une boule blanche ?

b. Quelle est la probabilité pour que le n-ème tirage soit la k-ème apparition d'une boule blanche (avec $k \in [\![1,n]\!]$ donné) ?

- -

a. Notons A_k l'événement: "le k-ème tirage amène une boule blanche". Alors, par indépendance des tirages, les événements A_k sont indépendants, et on a $P(A_k) = p$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. L'événement E: "le n-ème tirage donne la première apparition d'une boule blanche" est $\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n$, sa probabilité est donc

$$P(E) = \big(1 - P(A_1)\big)\cdots\big(1 - P(A_{n-1})\big)\,P(A_n) = q^{n-1}p\ .$$

b. Notons F l'événement: "le n-ème tirage donne la k-ème apparition d'une boule blanche". Notons aussi B l'événement: "les $n-1$ premiers tirages ont amené $k-1$ boules blanches". On a alors $F = B \cap A_n$, et les événements B et A_n sont indépendants, donc $P(F) = P(B)\,P(A_n) = p\,P(B)$. Par ailleurs, l'événement B correspond à la présence de $k-1$ "succès" lors d'une répétition de $n-1$ épreuves de Bernoulli indépendantes, on reconnaît donc la loi binomiale, ainsi $P(B) = \dbinom{n-1}{k-1}\,p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}$. Finalement,

$$P(F) = \binom{n-1}{k-1}\,p^k q^{n-k}\ .$$

---

3. Une succession d'individus $A_1, \cdots, A_n$ se transmet une information binaire du type "oui" ou "non". Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçue avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son contraire avec la probabilité $q = 1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres. Calculer la probabilité π_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1. Quelle est la limite de π_n quand n tend vers l'infini ?

- -

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, notons B_k l'événement: "l'individu A_k a reçu la bonne information (celle émise par A_1)". On a alors $P(B_1) = 1$ et, pour $k \geq 1$, par la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned} \pi_{k+1} = P(B_{k+1}) &= P(B_{k+1}|B_k)\,P(B_k) + P(B_{k+1}|\overline{B_k})\,P(\overline{B_k}) \\ &= p\,P(B_k) + (1-p)\,\big(1 - P(B_k)\big) \\ &= (2p-1)\,\pi_k + (1-p)\ . \end{aligned}$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique. L'équation $l = (2p-1)l + (1-p)$ a pour solution $l = \dfrac{1}{2}$, donc la suite (v_k) définie par $v_k = P(B_k) - \dfrac{1}{2}$ est géométrique, de raison $2p-1$, ce que l'improbable lecteur se fera un plaisir de vérifier par le calcul. Ainsi, $v_k = (2p-1)^{k-1}v_1 = \dfrac{1}{2}(2p-1)^{k-1}$. Puis $\pi_n = P(B_n) = \dfrac{1}{2}\Big(1 + (2p-1)^{n-1}\Big)$.

Si on a $0 < p < 1$, alors $-1 < 2p-1 < 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \pi_n = \frac{1}{2}$.

---

4. Soient $A_1, \cdots, A_n$ des événements indépendants. Montrer que la probabilité pour qu'aucun d'eux ne soit réalisée est majorée par $M = \exp\Big(-\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\Big)$.

- -

On étudie $P\Big(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\Big)$. Par indépendance des $\overline{A_k}$, on a

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\Big) = \prod_{k=1}^{n} P(\overline{A_k}) = \prod_{k=1}^{n} \big(1 - P(A_k)\big)\ .$$

Or, pour $x \in [0, 1]$, on a $0 \leq 1 - x \leq e^{-x}$, d'où

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\Big) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{-P(A_k)} = \exp\Big(-\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\Big) = M\ .$$

---

5. Une maladie touche une personne sur 10000. Un test sanguin, censé dépister cette maladie, donne un résultat positif chez 99% des malades, mais est aussi faussement positif chez 0,1% des personnes saines. Un individu passe ce test et le résultat est positif. Quelle est sa probabilité d'être malade ?

- -

Considérons les événements:

$M =$"l'individu testé est atteint par la maladie"

$T =$"le résultat du test est positif"

On a $P(M) = 10^{-4}$, $P(T|M) = 0,99$, $P(T|\overline{M}) = 10^{-3}$. On cherche $P(M|T)$. Par la formule de Bayes,

$$P(M|T) = \frac{P(T|M)\cdot P(M)}{P(T|M)\cdot P(M) + P(T|\overline{M})\cdot P(\overline{M})} = \frac{0,99\times 10^{-4}}{0,99\times 10^{-4} + 0,9999\times 10^{-3}} \simeq 0,09009\ .$$

Un individu testé positif a donc... 9% de chances d'être malade!

6.a. En considérant le coefficient de X^n dans le polynôme $P = (1+X)^{2n} = (1+X)^n(1+X)^n$, démontrer la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

b. Deux joueurs jouent indépendamment n parties de pile ou face avec des pièces équilibrées. Quelle est la probabilité p_n pour qu'ils obtiennent le même nombre de fois "face" ?

c. On remarque que p_n est aussi la probabilité d'obtenir n fois "face" lors de $2n$ lancers. Pouvait-on s'en douter ?

d. Donner un équivalent de p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- -

a. Le coefficient de X^n dans $(1+X)^{2n}$ est le coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ d'après la formule du binôme, mais c'est aussi, en décomposant sous la forme $(1+X)^n(1+X)^n = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k\right)^2$, la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 .$$

En effet, le coefficient de X^n *dans le produit de deux polynômes* $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *et* $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ *est* $c_n = \displaystyle\sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

b. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, notons A_k l'événement: "le premier joueur obtient k fois face", et B_k l'événement: "le deuxième joueur obtient k fois face". Pour tout k, on a $P(A_k) = P(B_k) = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}$, puisque le nombre de "face" lors d'une succesion de n lancers soit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$ de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$. On cherche $p_n = P(E)$ avec $E = \displaystyle\bigsqcup_{k=0}^{n} (A_k \cap B_k)$, c'est une union disjointe. Les lancers des deux joueurs étant indépendants (*pour formaliser un peu, on introduit les variables aléatoires* X *et* Y *correspondant aux nombres de "face" obtenus respectivement par chacun des deux joueurs, ces deux variables sont indépendantes, donc les événements* $A_k = \{X = k\}$ *et* $B_k = \{Y = k\}$ *qui leur sont associés sont indépendants*), on a donc $P(A_k \cap B_k) = P(A_k)\,P(B_k) = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{n}{k}^2$. Enfin, les événements $A_k \cap B_k$ étant deux à deux incompatibles (réunion disjointe), on a

$$P(E) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k \cap B_k) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} .$$

c. Codons les résultats des deux joueurs sous la forme d'une suite de $2n$ "bits" en convenant de noter successivement les résultats du premier joueur avec 0 pour "pile" et 1 pour "face", puis les résultats du deuxième joueur avec 1 pour "pile" et 0 pour "face". Les 4^n suites (i.e. éléments de $\{0,1\}^{2n}$) possibles sont équiprobables, et l'événement E de la question précédente correspond à celles constituées de n fois 0 et n fois 1, qui sont au nombre de $\binom{2n}{n}$. C'est aussi le nombre de tirages comportant n fois "face" lors d'une succession de $2n$ lancers d'une pièce.

d. Donc $p_n = \dfrac{(2n)!}{4^n\,(n!)^2}$. La formule de Stirling donne $p_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

---

7. Un groupe de n chasseurs tire simultanément et indépendamment sur n canards. Chaque chasseur ne tire qu'une seule fois et atteint toujours sa cible.

a. Quelle est la probabilité p_n qu'au moins un canard survive ? Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

b. L'un des canards s'appelle Saturnin. Quelle est la probablité q_n qu'il survive ? Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$.

- -

a. On peut modéliser le résultat du tir par une application de l'ensemble $\mathcal{H}_n$ des n chasseurs vers l'ensemble $\mathcal{C}_n$ des n canards, puisque chaque chasseur atteint un et un seul canard. Donc $|\Omega| = n^n$. Au moins un canard survit si et seulement si cette application n'est pas surjective, i.e. si et seulement si elle n'est pas bijective. Or le nombre d'applications bijectives de $\mathcal{H}_n$ vers $\mathcal{C}_n$ est $n!$. La probabilité qu'au moins un canard survive est donc $p_n = 1 - \dfrac{n!}{n^n}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 1$ puisque $n! = o(n^n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Saturnin s'en tire si et seulement si l'application correspondant au tir est à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{C}_n\setminus\{\text{Saturnin}\}$, de cardinal $n-1$. Comme il y a $(n-1)^n$ applications de l'ensemble $\mathcal{H}_n$ de cardinal n vers l'ensemble $\mathcal{C}_n\setminus\{\text{Saturnin}\}$, de cardinal $n-1$, la probabilité de survie de Saturnin est $q_n = \dfrac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = e^{-1}$.

Variables aléatoires.

8. Un archer tire successivement sur n cibles. À chaque tir, il a la probabilité p de toucher la cible et les tirs sont supposés indépendants. Il tire une première fois sur chaque cible et on note X le nombre de cibles atteintes lors de ce premier jet. L'archer tire ensuite une seconde fois sur les cibles restantes et l'on note Y le nombre de cibles touchées lors de cette tentative. Déterminer la loi de la variable $Z = X + Y$.

- -

On a $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $\{Z=k\} = \bigsqcup\limits_{j=0}^{k} \Big(\{X=j\} \cap \{Y=k-j\}\Big)$.

Donc

$$P(Z=k) = \sum_{j=0}^{k} P\Big(\{X=j\} \,\cap\, \{Y=k-j\}\Big) = \sum_{j=0}^{k} P(X=j)\,P\big(Y=k-j|X=j\big)\ .$$

Or, la loi de X est binomiale de paramètres n et p, donc $P(X=j) = \binom{n}{j} p^j q^{n-j}$. Si on fixe $j \in [\![0,n]\!]$, la loi conditionnelle de Y sachant $X=j$ est binomiale de paramètres $n-j$

et p donc, si $k \in [\![j,n]\!]$, alors $P\big(Y = k-j | X = j\big) = \binom{n-j}{k-j} p^{k-j} q^{n-k}$, avec $q = 1-p$. On obtient donc

$$
\begin{aligned}
P(Z=k) &= p^k\, q^{2n-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j}\, q^{-j} \\
&= p^k\, q^{2n-k} \sum_{j=0}^{k} \frac{n!}{j!\,(k-j)!\,(n-k)!}\, q^{-j} \\
&= p^k\, q^{2n-k} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!\,(k-j)!}\, q^{-j} \\
&= \binom{n}{k} p^k\, q^{2n-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 1^{k-j} \Big(\frac{1}{q}\Big)^j \\
&= \binom{n}{k} p^k\, q^{2n-k} \Big(1+\frac{1}{q}\Big)^k \\
&= \binom{n}{k} \big(p(1+q)\big)^k\, (q^2)^{n-k}\ .
\end{aligned}
$$

Posons $p' = p(1+q) = p(2-p)$, on vérifie facilement que $p' \in [0,1]$ et que $1-p' = q^2$. On a ainsi prouvé que la variable Z suit une loi binomiale, de paramètres n et p'.

---

9. Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent des lois binomiales de tailles n et m et de même paramètre p. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Z = X+Y$?

- -

On a clairement $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$, $Y(\Omega) = [\![0,m]\!]$ et $Z(\Omega) = [\![0,n+m]\!]$. Pour $k \in [\![0,n+m]\!]$, on a

$$\{Z=k\} = \bigsqcup_{j=0}^{k} \big(\{X=j\} \,\cap\, \{Y=k-j\}\big)\ .$$

Donc $P(Z=k) = \sum_{j=0}^{k} P\big(\{X=j\} \,\cap\, \{Y=k-j\}\big) = \sum_{j=0}^{k} P(X=j)\, P(Y=k-j)$ puisque les variables X et Y sont supposées indépendantes. On obtient donc

$$
\begin{aligned}
P(Z=k) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \binom{m}{k-j} p^{k-j} (1-p)^{m-(k-j)} \\
&= p^k\, (1-p)^{n+m-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j}\ .
\end{aligned}
$$

On conclut grâce à l'identité de Vandermonde: $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}$, que

$$\forall k \in [\![0, n+m]\!] \qquad P(Z=k) = \binom{n+m}{k}\, p^k\, (1-p)^{(n+m)-k} ,$$

donc Z suit la loi binomiale de paramètres $n+m$ et p.

Remarque. On peut démontrer l'identité de Vandermonde:

- de façon algébrique, en écrivant de deux façons le coefficient de X^k dans le polynôme $(1+X)^{n+m} = (1+X)^n(1+X)^m$;

- de façon combinatoire, en écrivant le nombre de façons de choisir k éléments dans un ensemble E de cardinal $n+m$ que l'on considérerait comme réunion disjointe d'un ensemble F de cardinal n et d'un ensemble G de cardinal m (pour un j donné dans $[\![0, k]\!]$, on doit choisir j éléments dans F et $k-j$ éléments dans G).

10*. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur un même espace probabilisé fini (Ω, P). On suppose que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{E}(X^k) = \mathrm{E}(Y^k) .$$

Montrer que X et Y suivent la même loi. *On pourra introduire un polynôme de Lagrange prenant la valeur 1 sur l'un des réels appartenant à l'ensemble $X(\Omega) \cup Y(\Omega)$, et prenant la valeur 0 sur tous les autres éléments de cet ensemble.*

- -

Posons $X(\Omega) \cup Y(\Omega) = \{z_1, \cdots, z_n\}$. On a alors $\mathrm{E}(X^k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(X=z_i)\, z_i^k$ par le théorème de transfert et, parallèlement, $\mathrm{E}(Y^k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(Y=z_i)\, z_i^k$.

Si $L = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k T^k$ est un polynôme (exceptionnellement, on notera ici T l'indéterminée), alors, par linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}\big(L(X)\big) = \mathrm{E}\Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k\Big) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{E}(X^k)$, et un calcul analogue avec la variable Y montre que $\mathrm{E}\big(L(X)\big) = \mathrm{E}\big(L(Y)\big)$ pour tout polynôme L.

Mais d'autre part, on a

$$\mathrm{E}\big(L(X)\big) = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{E}(X^k) = \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{i=1}^{n} P(X=z_i) z_i^k = \sum_{i=1}^{n} P(X=z_i) \sum_{k=0}^{d} a_k z_i^k = \sum_{i=1}^{n} P(X=z_i) L(z_i) .$$

Fixons un indice $j \in [\![1, n]\!]$, et considérons un polynôme L_j tel que $L_j(z_j) = 1$ et $L_j(z_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}$. Un tel polynôme existe, on peut prendre par exemple le polynôme d'interpolation de Lagrange $L_j = \displaystyle\prod_{i \neq j} \Big(\frac{T - x_i}{x_j - x_i}\Big)$. On a alors $\mathrm{E}\big(L_j(X)\big) = P(X=z_j)$ et, parallèlement, $\mathrm{E}\big(L_j(Y)\big) = P(Y = z_j)$. On déduit alors de ce qui précède que $P(X = z_j) = P(Y = z_j)$ pour tout j, ce qui montre que X et Y suivent la même loi.

---

11. Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules dans celle-ci et on note X le nombre de boules rouges obtenues lors de ce tirage. Quelle est la loi de X, son espérance, sa variance ?

- -

Clairement, $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. On peut d'ailleurs choisir comme univers l'ensemble $\mathcal{P}_n\big([\![1, 2n]\!]\big)$ des parties à n éléments de l'intervalle entier $[\![1, 2n]\!]$ si l'on convient de numéroter les boules de 1 à $2n$, muni de la probabilité uniforme. Le nombre de tirages possibles est $|\Omega| = \binom{2n}{n}$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, l'événement $\{X = k\}$ est réalisé si l'on tire k boules parmi les n rouges, et $n-k$ boules parmi les n blanches, le nombre de tirages "favorables" est alors $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$. Comme on est en situation d'équiprobabilité, on déduit

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad P(X = k) = \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}} \; .$$

Il est possible à partir de cela de calculer $\mathrm{E}(X)$, puis $\mathrm{E}(X^2)$, puis la variance mais bof! Voici une meilleure idée: considérons que les boules rouges sont numérotées de 1 à n. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit U_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule i a été tirée, et 0 sinon. Il est clair que $P(U_i = 1) = \frac{1}{2}$ (comme on tire la moitié des boules, la boule i a une chance sur deux de figurer dans le tirage), donc U_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\Big(\frac{1}{2}\Big)$ et $\mathrm{E}(U_i) = \frac{1}{2}$. Enfin, $X = \sum_{i=1}^{n} U_i$, donc par linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$, résultat assez évident intuitivement.

Ensuite, $X^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} U_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} U_i^2 + \sum_{i \neq j} U_i U_j$. Comme U_i suit une loi de Bernoulli, $U_i^2 = U_i$. Si $i \neq j$, la variable $U_i U_j$ suit aussi une loi de Bernoulli (les valeurs possibles sont 0 et 1) et, par un raisonnement simple de dénombrement,

$$\mathrm{E}(U_i U_j) = P(U_i U_j = 1) = \frac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n-1}{2(2n-1)} \; .$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(U_i^2) + \sum_{i \neq j} \mathrm{E}(U_i U_j) = n\,\frac{1}{2} + n(n-1)\,\frac{n-1}{2(2n-1)} = \frac{n^3}{2(2n-1)}$$

après réduction sur feu moyen. Et enfin, par la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = \frac{n^2}{4(2n-1)} \ .$$

---

12. On considère une suite (X_k) de variables indépendantes, suivant chacune la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, et on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leq m) = 0$.

\- -

La variable S_n quit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, donc $\mathrm{E}(S_n) = np$ et $\mathrm{V}(S_n) = npq$ avec $q = 1-p$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors, pour tout $a > 0$, $P\big(|S_n - np| \geq a\big) \leq \dfrac{npq}{a^2}$. Si l'on fixe m, comme p est strictement positif, on a $np > m$ à partir d'un certain rang N et, à partir de ce rang, on a

$$\big\{S_n \leq m\big\} \subset \big\{|S_n - np| \geq np - m\big\} \ .$$

Pour $n \geq N$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors

$$P(S_n \leq m) \leq \frac{npq}{(np-m)^2} \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0 \ .$$

---

13. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire n boules sans remise ($1 \leq n \leq N$). On note X et Y le plus petit et le plus grand numéros obtenus.

a. Pour $k \in [\![1, N]\!]$, déterminer $P(X \geq k)$. En déduire la loi de X.

b. Pour $l \in [\![1, N]\!]$, déterminer $P(Y \leq l)$. En déduire la loi de Y.

c. Quelle est la loi conjointe du couple $U = (X, Y)$?

\- -

On peut considérer que l'univers est l'ensemble des parties à n éléments de l'intervalle $[\![1, N]\!]$, noté $\mathcal{P}_n\big([\![1, N]\!]\big)$, de cardinal $\dbinom{N}{n}$, muni de l'équiprobabilité.

a. L'événement $\{X \geq k\}$ coïncide donc avec l'ensemble $\mathcal{P}_n\big([\![k, N]\!]\big)$, de cardinal $\dbinom{N-k+1}{n}$, puisque cela signifie que l'on tire n boules dont les numéros sont compris entre k et N. Notons que cet ensemble est vide si $n > N-k+1$, mais ceci est cohérent avec la convention $\dbinom{n}{p} = 0$ lorsque $p > n$. On a donc $P(X \geq k) = \dfrac{\dbinom{N-k+1}{n}}{\dbinom{N}{n}}$. On en déduit

$$P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1) = \frac{\dbinom{N-k+1}{n} - \dbinom{N-k}{n}}{\dbinom{N}{n}} = \frac{\dbinom{N-k}{n-1}}{\dbinom{N}{n}}$$

en utilisant la formule de Pascal.

Remarque. On retrouve ce résultat plus simplement en voyant que l'événement $\{X = k\}$ correspond aux parties de cardinal n de l'intervalle $[\![1, N]\!]$ qui contiennent l'élément k et qui contiennent $n-1$ éléments distincts parmi les $N-k$ éléments de l'intervalle $[\![k+1, N]\!]$, il y a donc $\binom{N-k}{n-1}$ telles parties.

b. De façon analogue, $\{Y \leq l\} = \mathcal{P}_n\big([\![1, l]\!]\big)$, donc $P(Y \leq l) = \dfrac{\binom{l}{n}}{\binom{N}{n}}$, puis

$$P(Y = l) = P(Y \leq l) - P(Y \leq l-1) = \frac{\binom{l}{n} - \binom{l-1}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{l-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$

c. L'événement $\big\{U = (k, l)\big\} = \{X = k\} \cap \{Y = l\}$ correspond aux parties de cardinal n de l'intervalle $[\![1, N]\!]$ contenant l'élément k, l'élément l, et $n-2$ éléments parmi les $l-k-1$ de l'intervalle $[\![k+1, l-1]\!]$. Il y a $\binom{l-k-1}{n-2}$ telles parties, donc

$$\forall (k, l) \in [\![1, N]\!]^2 \qquad P\big((X, Y) = (k, l)\big) = \frac{\binom{l-k-1}{n-2}}{\binom{N}{n}} .$$

---

14. Marche aléatoire sur Z.

Un mobile se déplace sur un axe gradué. À l'instant 0, il est à l'origine. À chaque instant entier, son abscisse augmente d'une unité avec la probabilité p (on parle de pas vers la droite), et diminue d'une unité avec la probabilité $q = 1 - p$ (on parle de pas vers la gauche). On note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n.

a. Déterminer l'ensemble $X_n(\Omega)$.

b. On note D_n le nombre de pas vers la droite effectués par le mobile jusqu'à l'instant n. Quelle relation y a-t-il entre D_n et X_n?

c. Quelle est la loi de D_n ? En déduire la loi de X_n.

d. Calculer l'espérance et la variance de X_n.

- -

a. À chaque instant, on se déplace d'une unité vers la droite ou vers la gauche, ainsi $|X_{n+1} - X_n| = 1$, et X_n et X_{n+1} sont de parités opposées. Comme $X_0 = 0$, X_n est de même parité que n. Ainsi, $X_0(\Omega) = \{0\}$, $X_1(\Omega) = \{-1, 1\}$, $X_2(\Omega) = \{-2, 0, 2\}$. Finalement, pour tout p entier naturel, on a

$$X_{2p}(\Omega) = \{-2p, -2(p-1), \cdots, -2, 0, 2, \cdots, 2(p-1), 2p\}$$

$$X_{2p+1}(\Omega) = \{-(2p+1), -(2p-1), \cdots, -1, 1, \cdots, 2p-1, 2p+1\} .$$

b. S'il y a D_n pas vers la droite jusqu'à l'instant n, c'est qu'il y a $n - D_n$ pas vers la gauche. Donc la position du mobile à l'instant n est $X_n = D_n - (n - D_n) = 2D_n - n$.

c. On peut écrire $D_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} U_k$, où U_k est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si, à l'instant k, on choisit de faire un pas vers la droite, et la valeur 0 si l'on choisit de faire un pas vers la gauche. Ces variables aléatoires U_k sont mutuellement indépendantes, et chacune d'elles suit la loi $\mathcal{B}(p)$ de Bernoulli de paramètre p. La variable D_n suit donc la loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n,p)$, autrement dit $D_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(D_n = k) = \displaystyle\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Donc, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(X_n = 2k - n) = \displaystyle\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, ce qui détermine la loi de X_n.

d. On a $\mathrm{E}(D_n) = np$ et $\mathrm{V}(D_n) = npq$ (c'est du cours). Par linéarité de l'espérance, on déduit $\mathrm{E}(X_n) = 2np - n = (2p-1)n$. De la relation $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$, on déduit $\mathrm{V}(X_n) = 4\,\mathrm{V}(D_n) = 4npq$.

---

15. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages avec remise dans cette urne et on note $X_1, \cdots, X_n$ les numéros obtenus. Soit $M_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire M_n, calculer son espérance. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}(M_n)$. Pour n (nombre de tirages) fixé, donner un équivalent de $\mathrm{E}(M_n)$ lorsque N (le nombre de boules) tend vers l'infini.

- -

On peut prendre comme univers $\Omega = [\![1,N]\!]^n$, de cardinal N^n, chaque tirage étant identifié à un n-uplet d'éléments de l'intervalle entier $[\![1,N]\!]$. Les N^n tirages possibles sont équiprobables. On a $M_n(\Omega) = [\![1,N]\!]$ et, si $k \in [\![1,N]\!]$, l'événement $\{M_n \le k\}$ correspond aux cas où les n boules tirées sont numérotées dans l'intervalle $[\![1,k]\!]$, autrement dit $\{M_n \le k\} = [\![1,k]\!]^n$ est un événement de cardinal k^n, donc de probabilité $\left(\dfrac{k}{N}\right)^n$. Donc

$$\forall k \in [\![1,N]\!] \qquad P(M_n = k) = P(M_n \le k) - P(M_n \le k-1) = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}\ .$$

NB: La formule reste vraie pour $k = 1$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(M_n) &= \sum_{k=1}^{N} k\, P(M_n = k) \\
&= \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^{N} \Big(k^{n+1} - k(k-1)^n\Big) \\
&= \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^{N} \Big(k^{n+1} - (k-1)^{n+1} - (k-1)^n\Big) \\
&= \frac{1}{N^n} \sum_{k=1}^{N} \Big(k^{n+1} - (k-1)^{n+1}\Big) - \frac{1}{N^n} \sum_{k=0}^{N-1} k^n
\end{aligned}$$

Après télescopage, $\mathrm{E}(M_n) = N - \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$. Pour N fixé, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}(M_n) = N$, ce qui est conforme à l'intuition. Pour n fixé, on a

$$\frac{\mathrm{E}(M_n)}{N} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n \quad \xrightarrow[N\to+\infty]{} \quad 1 - \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

(on reconnaît une somme de Riemann). Donc $\mathrm{E}(M_n) \underset{N\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n+1} N$.