DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 6

PSI2 2024-2025 **à rendre le mercredi 08/01/2025**

EXERCICE

Dans tout l'exercice, pour tout entier naturel k, on identifie polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$ et fonction polynomiale associée.

1. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$ unitaire (le coefficient du terme de plus haut degré de P vaut 1).

a. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Montrer que: $\forall z \in \mathbb{C} \qquad |z-\alpha| \geq \big|\mathrm{Im}(z)\big|$.

b. On suppose dans cette question que P est scindé sur $\mathbb{R}$. En utilisant une factorisation de P, montrer que:

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \big|P(z)\big| \geq \big|\mathrm{Im}(z)\big|^{\deg(P)}.$$

c. On prend dans cette question $P(X) = X^3 + 1$.

Donner une factorisation de P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Trouver $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\big|P(z_0)\big| < \big|\mathrm{Im}(z_0)\big|^{\deg(P)}$.

d. On suppose dans cette question que: $\forall z \in \mathbb{C} \qquad \big|P(z)\big| \geq \big|\mathrm{Im}(z)\big|^{\deg(P)}$.

Montrer que toutes les racines de P sont réelles. En déduire que P est scindé sur $\mathbb{R}$.

e. Énoncer clairement le résultat obtenu.

2. Soit q un entier naturel non nul, et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ qui converge vers une matrice A.

Pour tout n entier naturel, on appelle P_n le polynôme caractéristique de A_n. On appelle P celui de la matrice A.

a. Donner le degré et le coefficient dominant de P_n.

b. Prouver que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(z) = P(z)$.

c. En déduire que A est trigonalisable.

d. Qu'en conclut-on pour l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$?

3. Dans cette question, on prend $q = 2$ et $A_n = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{1}{n} & 1-\dfrac{\sin(n)}{n} \\ 0 & 1+\dfrac{1}{n} \end{pmatrix}$ pour n entier naturel non nul.

a. Déterminer $A = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

b. Étudier la diagonalisabilité des matrices A_n et A dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

c. Que conclure ?

4. On note $\mathcal{D}_q$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables, et $\mathcal{T}_q$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ qui sont trigonalisables.

a. Quelle inclusion y a-t-il entre ces deux ensembles ?

b. En utilisant les questions précédentes, prouver l'inclusion $\overline{\mathcal{D}_q} \subset \mathcal{T}_q$, où la notation $\overline{\mathcal{D}_q}$ représente l'adhérence de $\mathcal{D}_q$ dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

c. Soit $T \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure. Montrer que, pour n entier naturel suffisamment grand, la matrice $T_n = T + \mathrm{diag}\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \cdots, \dfrac{q}{n}\right)$ est diagonalisable.

d. En déduire l'égalité $\overline{\mathcal{D}_q} = \mathcal{T}_q$.

PROBLÈME

Les trois parties de ce problème sont construites autour d'un thème commun, mais elles peuvent êtres traitées indépendamment. La difficulté va crescendo.

Toutes les fonctions considérées dans ce problème sont à valeurs réelles.

Si f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, on appelle **zéro** de f tout réel x de I tel que $f(x) = 0$.

PARTIE A. Étude d'exemples.

1. On considère l'équation différentielle **(E1):** $y'' + y = 0$. Montrer que toute fonction solution de **(E1)** sur $\mathbb{R}$ admet une infinité de zéros.

2. Dans cette question, on considère l'équation

$$\textbf{(E2):} \qquad y'' + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) y = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_+^* \ .$$

a. Montrer qu'une fonction $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ est solution de **(E2)** si et seulement si la fonction $z : x \mapsto z(x) = x\, y(x)$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de

$$\textbf{(E'2):} \qquad xz'' - 2z' + xz = 0 \ .$$

b. Vérifier que les fonctions $z_1 : x \mapsto x \sin x + \cos x$ et $z_2 : x \mapsto x \cos x - \sin x$ sont solutions de **(E'2)** sur $\mathbb{R}$.

c. Décrire l'ensemble des solutions de **(E'2)** sur $\mathbb{R}_+^*$, préciser sa structure.

d. Décrire l'ensemble des solutions de **(E'2)** sur $\mathbb{R}$. On montrera que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et on précisera sa dimension.

e. Quel est le signe de $z_1(n\pi)$, pour n entier naturel ? En déduire que la fonction z_1 admet une infinité de zéros sur $\mathbb{R}_+^*$.

f. Montrer que toute fonction y solution de **(E2)** sur $\mathbb{R}_+^*$ admet une infinité de zéros.

PARTIE B. Zéros des solutions d'une équation différentielle

Dans cette partie, on note $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On considère l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) : \qquad y'' + \big(1 + q(x)\big)\, y = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}_+ \ .$$

On note f une fonction solution de **(E)** sur $\mathbb{R}_+$. Soit a un réel positif.

3. Pour tout réel positif x, on pose

$$g(x) = \int_a^x q(t)\, f(t)\, \sin(t - x)\, \mathrm{d}t \ .$$

a. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et prouver la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad g''(x) + g(x) = f''(x) + f(x) \ .$$

On commencera par transformer l'expression $\sin(t - x)$.

b. En déduire l'existence de deux constantes C_1 et C_2 (dépendant du réel a) telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f(x) = C_1\ \cos(x) + C_2\ \sin(x) + \int_a^x q(t)\ f(t)\ \sin(t-x)\ \mathrm{d}t\ .$$

4. Montrer qu'il existe a réel positif tel que $\displaystyle\int_a^{+\infty} \big|q(t)\big|\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}$. *Dans toute la suite, on supposera que le réel a vérifie cette condition.*

5. Soit b un réel strictement plus grand que a. On note $M_b = \max\limits_{t\in[a,b]} \big|f(t)\big|$.

a. Justifier l'existence de M_b.

b. Prouver, pour $x \in [a,b]$, l'inégalité $\left|\displaystyle\int_a^x q(t)\ f(t)\ \sin(t-x)\ \mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{2} M_b$. En déduire que $M_b \leq 2\,\big(|C_1| + |C_2|\big)$.

c. En déduire que la fonction f est bornée sur $[a, +\infty[$, puis qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

6. Montrer que, pour $x \geq 0$, la fonction $p_x : t \mapsto q(t)\ f(t)\ \sin(t-x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

7.a. Prouver l'existence de deux constantes C_3 et C_4 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f(x) = C_3\ \cos(x) + C_4\ \sin(x) - \int_x^{+\infty} q(t)\ f(t)\ \sin(t-x)\ \mathrm{d}t\ .$$

b. Prouver que $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - C_3\ \cos(x) - C_4\ \sin(x)\big) = 0$.

8.a. On suppose $(C_3, C_4) \neq (0,0)$. Montrer que f admet une infinité de zéros sur $\mathbb{R}_+$.

b. On suppose $C_3 = C_4 = 0$. Montrer que f est alors la fonction nulle.

PARTIE C. Théorème de Sturm et applications

9. Principe des zéros isolés

Dans cette question, on note p une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et on note f une fonction solution sur I de l'équation différentielle **(E):** $y'' + p(x)\,y = 0$. On suppose que cette fonction f s'annule en un point a de I.

a. On suppose qu'il existe une suite (a_n) de points de $I \setminus \{a\}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(a_n) = 0\ .$$

Montrer que $f'(a) = 0$, puis que f est nulle sur I.

b. En déduire que, si f n'est pas la fonction nulle, alors il existe un réel α strictement positif tel que le point a soit le seul zéro de f sur $]a-\alpha, a+\alpha[\, \cap I$.

10. Dans cette question, on donne un réel a, un réel strictement positif ω, et une fonction $p : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue sur $[a, +\infty[$, telle que

$$\forall x \in [a, +\infty[\qquad p(x) \geq \omega^2\ .$$

On note f une solution de l'équation différentielle **(E) :** $y'' + p(x)\,y = 0$ sur $[a, +\infty[$.

L'objectif est de démontrer que f admet au moins un zéro dans l'intervalle $\left]a, a + \dfrac{\pi}{\omega}\right]$.

Par l'absurde, supposons que f ne s'annule pas sur cet intervalle.

a. Soit la fonction W définie sur $[a, +\infty[$ par

$$W(x) = \omega\, f(x)\, \cos\big(\omega(x-a)\big) - f'(x)\, \sin\big(\omega(x-a)\big)\ .$$

Montrer que W est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et que sa dérivée W' garde un signe constant (au sens large) sur le segment $\left[a, a + \dfrac{\pi}{\omega}\right]$.

b. On suppose f strictement positive sur $\left]a, a + \dfrac{\pi}{\omega}\right]$. En considérant les signes de $W(a)$ et de $W\left(a + \dfrac{\pi}{\omega}\right)$, aboutir à une contradiction.

c. Conclure cette question.

Dans toute la suite du problème, on note f la solution sur $\mathbb{R}_+$ du problème de Cauchy

$$(\mathbf{P})\ :\quad \begin{cases} (\mathbf{E})\ : & y'' + e^x\, y = 0 \\ (\mathbf{CI}) & y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 1 \end{cases}\ .$$

On note $\mathcal{Z}(f) = \big\{x \in \mathbb{R}_+ \mid f(x) = 0\big\}$ l'ensemble des zéros de f sur $\mathbb{R}_+$.

11. Montrer que cet ensemble $\mathcal{Z}(f)$ n'est pas majoré.

12*. Montrer que l'ensemble $\mathcal{Z}(f) \cap \mathbb{R}_+^*$ admet un minimum, que l'on pourra nommer x_1.

13*. Montrer que l'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ est dénombrable et, plus précisément, que l'on peut écrire

$$\mathcal{Z}(f) = \big\{x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\big\}\ ,$$

où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante telle que $x_0 = 0$.

14. Montrer, pour tout n entier naturel, l'inégalité $x_{n+1} \leq x_n + \pi\, e^{-\frac{x_n}{2}}$.

15. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \big(x_{n+1} - x_n\big) = 0$.