EXERCICES sur les ESPACES PRÉHILBERTIENS et EUCLIDIENS
PSI2 2024-2025

Produit scalaire, norme associée, orthogonalité

1. Soient x et y deux vecteurs d'un espace préhilbertien E. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \|x + \lambda y\| \geq \|x\| \ .$$

2. Soit E un espace préhilbertien réel. Soient f et g deux applications de E vers E telles que

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \big(x|f(y)\big) = \big(g(x)|y\big) \ .$$

Montrer que f et g sont des endomorphismes de E.

3*. Soit E un espace préhilbertien, soit $u : E \to E$ une application conservant le produit scalaire, i.e. telle que

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \big(u(x)|u(y)\big) = (x|y) \ .$$

Montrer que u est un endomorphisme de E.

4. Soit $E = \mathcal{C}^1\big([0,1], \mathbb{R}\big)$. Pour $f \in E$ et $g \in E$, on pose

$$< f, g >= \int_0^1 f'(t)\, g'(t)\, \mathrm{d}t + f(1)\, g(0) + f(0)\, g(1) \ .$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \|AX\| \leq \|X\|$, où $\|\cdot\|$ représente la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$.
Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \|A^\top X\| \leq \|X\|$.

6. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel constitué des suites réelles bornées. Si u et v sont deux suites appartenant à E, on pose $(u|v) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n v_n}{2^n}$.

a. Montrer que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur E.

b. On note F le sous-espace vectoriel de E constitué des suites "presque nulles", c'est-à-dire dont les termes sont nuls à partir d'un certain rang. Déterminer l'orthogonal de F. Le sous-espace F admet-il un supplémentaire orthogonal ? Déterminer $(F^\perp)^\perp$.

Familles orthogonales ou orthonormales

7. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

a. Montrer que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur l'espace vectoriel E.

b. Calculer $(X^p|X^q)$ pour p et q entiers naturels.

c. Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$ pour ce produit scalaire.

8. L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ tel que

$$\forall (P, Q) \in E^2 \qquad (P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t \ .$$

a. Établir l'existence et l'unicité d'une famille orthogonale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que, pour tout n, le polynôme P_n soit unitaire de degré n.

b. Étudier la parité du polynôme P_n.

c. Pour $n \geq 2$, montrer que $P_{n+1} - XP_n \in \big(\mathbb{R}_{n-2}[X]\big)^\perp$.

d. En déduire l'existence d'un réel λ_n tel que $P_{n+1} = XP_n + \lambda_n\, P_{n-1}$.

9.a. Transformer en produit l'expression $\sin\big((n+1)x\big)+\sin\big((n-1)x\big)$. En déduire que, pour tout n entier naturel, il existe un unique polynôme U_n tel que

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \sin x\cdot U_n(\cos x)=\sin\big((n+1)x\big)\ .$$

b. Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et que la famille $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

10. Soient $x_1,\cdots,x_n$ des vecteurs d'un espace préhilbertien réel E. On note $G=(g_{ij})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $g_{ij}=(x_i|x_j)$.

a. Montrer qu'il existe une matrice (rectangulaire) M telle que $G=M^\top M$. *On pourra pour cela introduire une base orthonormale du s.e.v.* $F=\mathrm{Vect}(x_1,\cdots,x_n)$.

b. En déduire que le rang de la matrice G est égal au rang de la famille de vecteurs $(x_1,\cdots,x_n)$.

11. Soit $E=\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire :

$$(P,Q)\mapsto\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Déterminer la base de E obtenue par orthonormalisation de Schmidt de la base canonique $\mathcal{B}_0=(1,X,X^2,X^3)$.

12*. Soit E un espace euclidien, soit u un endomorphisme de E, de trace nulle.

a. Montrer qu'il existe un vecteur x non nul de E tel que $\big(u(x)|x\big)=0$.

b. Montrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls. *On pourra raisonner par récurrence sur la dimension de E.*

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

13. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on pose $I(a,b)=\displaystyle\int_0^{\pi}(a\sin x+b\cos x-x)^2\,\mathrm{d}x$. Déterminer le minimum de $I(a,b)$ lorsque (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$.

14. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on pose $I(a,b)=\displaystyle\int_0^{1}(ax+b-\ln x)^2\,\mathrm{d}x$. Déterminer le minimum de $I(a,b)$ lorsque (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$.

15. L'espace vectoriel $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire $(A|B)=\mathrm{tr}(A^\top B)$. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, soit $\mathcal{H}$ l'hyperplan constitué des matrices de trace nulle. Déterminer la distance $d(J,\mathcal{H})$.

Projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien

16. On considère l'espace $E=\mathbb{R}_n[X]$, muni du produit scalaire défini par $(P|Q)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kb_k$ si $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ et $Q=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}b_kX^k$. Déterminer le projeté orthogonal du polynôme constant $P_0=1$ sur l'hyperplan $H=\big\{P\in E\mid P(1)=0\big\}$.

17. Soit p un projecteur dans un espace euclidien E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leq \|x\|$.

18.a. Soit p un projecteur orthogonal dans un espace euclidien E. Montrer que, pour tout $x \in E$, on a $\|p(x)\| \leq \|x\|$ et $\big(p(x)|x\big) \geq 0$. Dans quel cas a-t-on $\big(p(x)|x\big) = 0$?

b. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E. Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme $f = p \circ q$ appartiennent à $[0, 1]$.

19. Soit H un hyperplan d'un espace euclidien E, soit u un vecteur unitaire de E n'appartenant pas à H, soit n un vecteur unitaire normal à H. On note p le projecteur sur H parallèlement à $D = \mathrm{Vect}(u)$. Pour tout $x \in E$, exprimer $p(x)$ à l'aide des vecteurs x, n et u.

Réponse: $p(x) = x - \dfrac{(n|x)}{(n|u)}\, u$.

Isométries. Matrices orthogonales.

20. Montrer que les endomorphismes orthogonaux d'un espace euclidien qui sont diagonalisables sont les symétries orthogonales.

21*. Déterminer les matrices orthogonales de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

22. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathrm{O}(n)$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i,j} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$ et $\displaystyle\Big|\sum_{i,j} a_{ij}\Big| \leq n$. *On pourra utiliser le vecteur* $U = (1, 1, \cdots, 1)$ *de* $\mathbb{R}^n$.

23. Soient M et N deux matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'égalité $M^\top M = N^\top N$ a lieu si et seulement s'il existe une matrice orthogonale U telle que $M = UN$.

24*. Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale.

a. Montrer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs, dont les blocs diagonaux sont de la forme suivante:

$$(1) \qquad \text{ou} \qquad (-1) \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}\,.$$

b. En déduire que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, et que ses valeurs propres sont des nombres complexes de module 1.

25.a. Soit $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale telle que $M + M^\top = 2I_n$. Montrer que $M = I_n$.

b. Soient A et B deux matrices orthogonales distinctes dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$[A, B] \,\cap\, \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A, B\}\,.$$

26*. Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille de n vecteurs dans un espace euclidien orienté de dimension n. Montrer que

$$\big|[x_1, \cdots, x_n]\big| \leq \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|\,.$$

Si la famille $(x_1, \cdots, x_n)$ *est libre, on pourra introduire son orthonormalisée.*

Étude du plan et de l'espace euclidiens

27. Reconnaître les endomorphismes de l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$ représentés par les matrices suivantes:

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix} .$$

28. Soit u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$, soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \qquad f(x) = x + (x|u)\,u + \sqrt{3}\,x \wedge u \,.$$

a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

b. Est-il orthogonal ?

c. Interprétation géométrique de f.

29. Soit E un espace euclidien, soit v un vecteur de E non nul, soit λ un réel non nul. On considère l'endomorphisme f de E défini par

$$\forall x \in E \qquad f(x) = x + \lambda\,(x|v)\,v \,.$$

a. À quelle condition sur λ et v a-t-on $f \in \mathrm{O}(E)$?

b. Si cette condition est réalisée, déterminer les éléments propres de f et interpréter géométriquement.

30. Soit E un espace euclidien orienté de dimension trois, soit f un endomorphisme de E, non nul, tel que

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \,.$$

Montrer que f est une rotation. *On essaiera de montrer que l'image d'une base orthonormale directe en est une aussi.*

31. Soient u et v deux vecteurs non nuls d'un espace E euclidien orienté de dimension trois. Étudier l'endomorphisme $f : x \mapsto u\wedge(v\wedge x)$ (noyau, image, éléments propres, diagonalisation éventuelle).

32. Soit E un espace euclidien orienté de dimension trois, soit a un vecteur non nul de E.

a. Montrer que l'application $f : x \mapsto a \wedge x$ est un endomorphisme de E. Préciser son noyau et son image.

b. Soit $b \in E$. Calculer $a \wedge (a \wedge b)$. Préciser à quelles conditions sur b l'équation $a \wedge x = b$ admet des solutions, et résoudre alors complètement cette équation.

Matrices et endomorphismes symétriques. Théorème spectral.

33. Plusieurs petites questions indépendantes:

a. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^\top A = I_n$. Montrer que $A = I_n$.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $A + A^\top$ est nilpotente. Montrer que A est anti-symétrique.

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose que A est "normale" ($AA^\top = A^\top A$) et nilpotente. Montrer que $A = 0$.

34. Que dire d'une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 2A^2 + 3A = 0$?

35. Diagonaliser, à l'aide d'une matrice de passage orthogonale, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

36. Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $< P, Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

a. Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

b. Soit $\varphi : P \mapsto Q = XP'' + (1 - X)P'$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, symétrique pour ce produit scalaire.

37. Soit E un espace euclidien, soit u un endomorphisme symétrique de E, de valeurs propres (distinctes) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, rangées dans l'ordre croissant ($\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m$). Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, notons E_i le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i.

a. Montrer que $\forall x \in E \quad \lambda_1 \|x\|^2 \leq \big(u(x)|x\big) \leq \lambda_m \|x\|^2$.

b. Pour quels vecteurs x l'une des deux inégalités ci-dessus est-elle une égalité ?

c. Soit M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $S = \dfrac{1}{2}\,(M + M^\top)$. On note α (resp. β) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de S. Montrer que toutes les valeurs propres réelles de M appartiennent à l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Qu'en déduit-on lorsque M est antisymétrique ?

38. Soit E un espace euclidien orienté de dimension trois, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme antisymétrique, c'est-à-dire tel que

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \big(u(x)|y\big) = -\big(x|u(y)\big)\ .$$

Montrer qu'il existe un unique vecteur ω de E tel que, pour tout x, on ait $u(x) = \omega \wedge x$. En déduire qu'il existe une base orthonormale directe de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $k \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{R}_+$.

39. Soient u et v deux endomorphismes symétriques d'un espace euclidien E, qui commutent. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle u et v sont représentés par des matrices diagonales.

40. Soient a et b deux vecteurs non colinéaires dans un espace euclidien E. Soit f l'endomorphisme de E défini par

$$\forall x \in E \qquad f(x) = (a|x)\, b + (b|x)\, a\ .$$

a. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

b. Montrer que f est diagonalisable.

c. Diagonaliser f.

41. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que son rang est égal au nombre de valeurs propres non nulles (comptées avec leur ordre de multiplicité) de $A^\top A$.

42. Soit E un espace euclidien.

a. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint positif. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme r autoadjoint positif tel que $r^2 = u$.

b. Soient u et v des endomorphismes autoadjoints positifs de E. Démontrer les inégalités

$$0 \leq \mathrm{tr}(u \circ v) \leq \mathrm{tr}(u) \cdot \mathrm{tr}(v) \ .$$

43. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité). Montrer que $\displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

44. Soit E un espace euclidien, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique défini positif. Montrer l'inégalité

$$\forall x \in E \qquad \|x\|^4 \leq \big(u(x)|x\big)\ \big(u^{-1}(x)|x\big) \ .$$

Déterminer les cas d'égalité.

45. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique réelle.

a. Montrer que A^2 est symétrique réelle et que $\mathrm{Sp}(A^2) \subset \mathbb{R}_-$.

b. On suppose A inversible. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, à valeurs propres imaginaires pures.

c. Montrer que $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$.

d.* En utilisant **c.**, montrer que le résultat du **b.** est vrai même si A n'est pas inversible.

46.a. Soit f un endomorphisme autoadjoint de E euclidien. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \big(\mathrm{Ker}(f)\big)^{\perp}$.

b. On suppose que f autoadjoint positif. Montrer qu'il existe un endomorphisme autoadjoint positif h tel que $h^2 = f$.

c. Soient f et g deux endomorphismes autoadjoints positifs de E. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}(f)\ \cap\ \mathrm{Ker}(g) \ .$$

d* Toujours avec f et g endomorphismes autoadjoints positifs, montrer que

$$\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) \ .$$

47. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

a. Montrer que, pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^\top AX = 0$.

b. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $M = A + S$ est inversible.

48.a. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont positifs ou nuls. Montrer que

$$\forall V \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{tr}(DV) \leq \mathrm{tr}(D) \ .$$

b. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Montrer que

$$\forall U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \qquad \mathrm{tr}(AU) \leq \mathrm{tr}(A) \ .$$