DM de MATHÉMATIQUES numéro 6 COMMENTAIRES
PSI2 2024-2025

Comme dans plusieurs travaux écrits précédents, beaucoup d'entre vous traitent de nombreuses questions, mais la qualité de l'argumentation est très moyenne. Faites-y attention car, si vous continuez ainsi, vous risquez fort d'être déçus par vos notes d'écrit aux concours.

EXERCICE

Un exercice posé au concours e3a il y a une dizaine d'années, sans grande difficulté, mais demandant toutefois de la précision dans l'argumentation... et c'est ce qui manque à beaucoup d'entre vous (*je sais, je me répète*)!

1.e. Il s'agit ici de faire un bilan de toute la question **1.** du sujet. Le résultat démontré que, si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, **supposé unitaire**, alors P est scindé sur $\mathbb{R}$ **si et seulement si**, pour tout z complexe, on a $\big|P(z)\big| \geq \big|\operatorname{Im}(z)\big|^{\deg(P)}$. La mention "$P$ unitaire" a souvent été oubliée.

2.c. Il fallait utiliser la question 1. pour montrer que P est scindé. Affirmer qu'une "limite de polynômes scindés" est encore scindé ne repose sur rien de solide sinon! L'affirmation, lue dans certaines copies, que les racines de P_n tendent vers les racines de P, est aussi une grande fumisterie. Il existe des résultats de "continuité des racines d'un polynôme" mais ceci est déjà un peu difficile à énoncer précisément, encore plus à démontrer, et hors de portée du programme de PSI.

2.d. "non fermé" ne veut pas dire "ouvert"!

3.b. Une erreur de rédaction déjà rencontrée dans de précédents devoirs: ce n'est pas parce que χ_A n'est pas scindé à racines simples qu'une matrice A n'est pas diagonalisable! Penser à $A = I_n$ par exemple. Il y a seulement une implication dans un sens:

si χ_A est scindé à racines simples, **alors** A est diagonalisable.

4.c. Beaucoup d'entre vous ont retenu (parce que l'exercice avait été traité en classe) que, pour n assez grand, les $t_{i,i} + \dfrac{i}{n}$ sont deux à deux distincts, mais ne savent pas expliquer pourquoi...

4.d. Pour montrer que $\mathcal{T}_q \subset \overline{\mathcal{D}_q}$, il faut partir d'une matrice A appartenant à $\mathcal{T}_q$, i.e. une matrice supposée trigonalisable. La première chose à faire pour appliquer la question précédente est donc de la trigonaliser, i.e. d'introduire P inversible et T triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$. Ensuite seulement, on peut applique le **4.c.** en n'oubliant pas de mentionner la continuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$.

PROBLÈME

2.c. Pour affirmer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de **(E'2)** sur $\mathbb{R}_+^*$ est $\operatorname{Vect}(z_1, z_2)$, il faut bien sûr s'appuyer sur les vérifications faites en **2.b.** mais aussi mentionner le cours qui dit que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel de dimension deux puisque le "coefficient" x devant z'' dans **(E'2)** ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.d. Question difficile certes, mais la plupart d'entre vous n'ont même pas compris pourquoi elle était difficile! Si l'intervalle d'étude est $\mathbb{R}$, le "coefficient" x devant z'' s'annule en 0, ce qui empêche d'écrire l'équation différentielle "sous forme normale", et alors le théorème de Cauchy (existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy) ne s'applique plus, et du coup on ne peut plus affirmer que l'espace vectoriel des solutions est de dimension deux... et le fait est qu'il est ici de dimension trois! Il y avait donc une étude de recollement en 0 à faire, et cela a été très peu vu dans vos copies.

2.f. La rédaction de nombreuses copies laisse penser que, si deux fonctions z_1 et z_2 ont chacune une infinité de zéros, alors toute combinaison linéaire de z_1 et z_2 a aussi une infinité de zéros. Ceci est pourtant faux: considérer $z_1(x) = \cos^2(x)$ et $z_2(x) = \sin^2(x)$, chacune s'annule une infinité de fois, mais $z_1 + z_2 = 1$ ne s'annule jamais!

3.a. Attention à la rédaction: le théorème fondamental de l'analyse (TFA) ne s'applique pas directement à la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_a^x q(t)\ f(t)\ \sin(t-x)\ \mathrm{d}t$ puisque la variable x apparaît à deux endroits dans cette écriture, aussi bien dans l'intégrande que dans les bornes. Il faut donc **d'abord** transformer l'écriture de $g(x)$ avec des formules de trigo, et **ensuite** mentionner le TFA pour affirmer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ puis $\mathcal{C}^2$.

Une erreur inadmissible: si f est continue sur un intervalle I, la dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est f, c'est-à-dire l'application $x \mapsto f(x)$, et certainement pas l'application $x \mapsto f(x) - f(a)$.

4. L'expression $r(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \big|q(t)\big|\ \mathrm{d}t$ peut être considérée comme "le reste d'ordre x" d'une intégrale généralisée convergente et il tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ (preuve facile), de la même façon que le reste d'ordre n d'une série convergente, à savoir $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Certains mentionnent des propriétés de la fonction $r : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \big|q(t)\big|\ \mathrm{d}t$ qui ne sont pas fausses (continuité, décroissance), mais qui n'ont rien à voir avec la question, et cela peut être sanctionné.

5.b. Certains m'ont fait remarquer, à juste titre, qu'il aurait été plus cohérent de demander de montrer l'inégalité $\left|\displaystyle\int_a^x q(t)\ f(t)\ \sin(t-x)\ \mathrm{d}t\right| \leq \dfrac{1}{2} M_b$ (borne x en haut et non borne b). Cela s'obtient de la même façon.

8.a. Quelques bons raisonnements, d'autres moins bons du style "on voit bien que tel terme ne va pas trop influer". Ce genre de phrase n'est jamais trop convaincante, trouvez autre chose!

10.a. Attention aux manipulations d'inégalités: de l'hypothèse $p(x) \geq \omega^2$, on ne peut déduire $p(x)\ f(x) \geq \omega^2\ f(x)$ que si $f(x)$ est positif!

10.c. La question **10.b.** montre que l'hypothèse que f est strictement positive sur $\left]a, a + \dfrac{\pi}{\omega}\right]$ conduit à une contradiction. Pour en déduire que f s'annule sur cet intervalle, il faut voir (et dire) que supposer f strictement négative conduit aussi à une contradiction.