Semaine 14 : du 20/01/2025 au 24/01/2025

Probabilités sur un univers fini

Tout le chapitre du programme de 1ère année

Calcul intégral

Théorème de convergence dominée.

Théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Théorèmes de continuité et de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre. Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Adaptation des théorèmes au cas où la condition de domination est vérifiée sur tout segment.

Théorème d'intégration terme à terme.

Espaces préhilbertiens et euclidiens

Définition d'un espace préhilbertien réel, d'un espace euclidien, norme associée au produit scalaire.

Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire. Identité de polarisation. Identité du parallélogramme.

Vecteurs orthogonaux. Familles orthogonales, relation de Pythagore. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Familles orthonormales.

Sous-espaces orthogonaux, notion de somme directe orthogonale.

Orthogonal d'une partie. Orthogonal d'un sous-espace, relations $F \cap F^\perp = \{0_E\}$, $F \subset (F^\perp)^\perp$, $\{x_1, \cdots, x_n\}^\perp = \big(\text{Vect}(x_1, \cdots, x_n)\big)^\perp$.

Existence de bases orthonormales dans un espace euclidien. Expression, dans une telle base, du produit scalaire de deux vecteurs, des coordonnées d'un vecteur. Interprétation des coefficients de la matrice d'un endomorphisme comme des produits scalaires.

Si V est un sous-espace **de dimension finie** d'un espace préhilbertien E, alors $V \oplus V^\perp = E$ et $(V^\perp)^\perp = V$. Projecteur orthogonal sur V, noté p_V. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale de V. Obtention du projeté orthogonal en résolvant un système linéaire (annulation de produits scalaires). Distance $d(x, V)$ d'un vecteur x au sous-espace V.

Inégalité de Bessel $\big\|p_V(x)\big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)^2 \leq \|x\|^2$, avec $(e_1, \cdots, v_n)$ base orthonormale de V, et cas d'égalité.

Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Dérivée d'une transformée de Laplace. *On pourra partir de* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *c.p.m. telle que* $t \mapsto f(t)\, e^{-p_0 t}$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}_+$ *et dériver sa transformée de Laplace sur* $]p_0, +\infty[$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité. Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.
- Montrer qu'une famille orthogonale finie de vecteurs non nuls est libre.
- Montrer que, si V est de dimension finie dans E préhilbertien, alors $V \oplus V^\perp = E$ et $(V^\perp)^\perp = V$. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x de E sur V. Distance de x à V.
- Description (algorithmique et géométrique) du procédé de Gram-Schmidt.
- Problème de la régression linéaire (droite des moindres carrés), interprétation en termes de projection orthogonale sur un s.e.v.