CORRIGÉ du DS de MATHÉMATIQUES numéro 5

PSI2 2024-2025 **le 18/01/2025**

PROBLÈME 1

d'après plusieurs sujets de Centrale, millésimes 2007, 2016 et 2023

PARTIE I. Un calcul de l'intégrale de Gauss

1. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, et elle est intégrable en $+\infty$ par exemple parce que $e^{-t^2} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$.

2. Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on reconnaît l'expression de sa primitive qui s'annule en zéro. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = e^{-x^2}$.

3. Posons $u(x,t) = \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1]$. Pour tout réel x, l'application $t \mapsto u(x,t)$ est définie et continue sur le segment $[0,1]$ d'où l'existence de l'intégrale $g(x)$. L'égalité $g(-x) = g(x)$ est immédiate, donc g est paire. Enfin, $g(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \big[\,\mathrm{Arctan}(t)\big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

4. On a vu que, pour tout x réel, l'application $t \mapsto u(x,t)$ est intégrable sur $[0,1]$. De plus, pour tout $t \in [0,1]$, l'application $x \mapsto u(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -2x\, e^{-x^2(1+t^2)}$. Soit a un réel strictement positif, soit le segment $S = [-a,a]$. Pour $(x,t) \in S\times[0,1]$, on a la majoration

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = 2|x|\, e^{-x^2(1+t^2)} \leq 2a\ .$$

La fonction constante $t \mapsto 2a$ étant intégrable sur le segment $[0,1]$, cette domination sur tout segment permet d'affirmer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a,a]$ pour tout $a>0$) avec

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = -2x\, e^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

5. Si $x \neq 0$, le changement de variable $u = xt$ conduit à

$$g'(x) = -2\, e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -2\, f'(x)\, f(x)\ ,$$

cette relation étant évidente pour $x = 0$.

6. On a $(f^2+g)' = 2ff' + g' = 0$, donc la fonction $h = f^2 + g$ est constante sur $\mathbb{R}$, et elle vaut $h(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

7. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}\quad f(x)^2 + g(x) = \dfrac{\pi}{4}$. Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \mathcal{G} = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ (l'intégrale de Gauss que l'on cherche à calculer), et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (par exemple parce qu'on a l'encadrement $0 \leq g(x) \leq \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}t = e^{-x^2}$). Donc $\mathcal{G}^2 = \dfrac{\pi}{4}$ et, comme on a clairement $\mathcal{G} \geq 0$, on trouve bien $\mathcal{G} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

PARTIE II. Définition de la transformation de Fourier

8. La fonction φ est clairement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et, comme elle est nulle en dehors du segment $S = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, elle est intégrable, donc $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout x réel,

$$\mathcal{F}(\varphi)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi xt}\,\mathrm{d}t\ .$$

Pour $x = 0$, on obtient $\mathcal{F}(\varphi)(0) = 1$.

Pour $x \neq 0$, on a

$$\mathcal{F}(\varphi)(x) = \left[\frac{-1}{2i\pi x}\, e^{-2i\pi x t}\right]_{t=-1/2}^{t=1/2} = \frac{i}{2\pi x}\left(e^{-i\pi x} - e^{i\pi x}\right) = \frac{i\,\big(-2i\,\sin(\pi x)\big)}{2\pi x} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\ .$$

La transformée de Fourier de φ est donc la fonction ψ introduite à la question suivante.

9.a. Du développement en série entière $\forall t \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(\pi t)^{2n+1}}{(2n+1)!}$, on déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \psi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,\pi^{2n}}{(2n+1)!}\, t^{2n}$$

(égalité vraie aussi pour $t = 0$). Ceci montre que ψ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, donc est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ d'après le cours.

b. La fonction $t \mapsto \big|\sin(\pi t)\big|$ étant 1-périodique, et positive sur $[0, 1]$, on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_n^{n+1} \frac{\big|\sin(\pi t)\big|}{\pi t}\,\mathrm{d}t \geq \int_n^{n+1} \frac{\big|\sin(\pi t)\big|}{\pi(n+1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^1 \sin(\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{(n+1)\pi^2}\ .$$

On en déduit par exemple, par la relation de Chasles, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \int_0^n \big|\psi(t)\big|\,\mathrm{d}t \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(n+1)\pi^2} = \frac{2}{\pi^2}\, H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\ ,$$

donc les "intégrales partielles" $\displaystyle\int_0^x \big|\psi(t)\big|\,\mathrm{d}t$ ne sont pas majorées, et la fonction ψ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$, et a fortiori n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Au passage, on vient de montrer que la transformation de Fourier, qui est bien sûr linéaire, i.e. $\mathcal{F}(\alpha f + g) = \alpha\,\mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$, n'est pas un endomorphisme de l'espace vectoriel $L^1(\mathbb{R})$.

10. D'abord $\mathcal{F}(f)$ est bornée puisque

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \big|\mathcal{F}(f)(x)\big| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2i\pi x t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t\ .$$

On a ainsi prouvé que $\big\|\mathcal{F}(f)\big\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Pour la continuité, appliquons le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre. Posons $h(x, t) = f(t)\, e^{-2i\pi x t}$ pour $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. Alors

- pour tout x réel, l'application $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$;
- pour tout t réel, l'application $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- on a la domination

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 \qquad \big|h(x, t)\big| = \big|f(t)\big| \leq \big|f(t)\big|\ ,$$

la fonction $|f|$ étant par hypothèse intégrable sur $\mathbb{R}$.

Tout ceci permet d'affirmer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

11.a. Posons $g_n(t) = t^n\, f(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors chaque g_n est continue sur $\mathbb{R}$.

Comme f appartient à l'espace $\mathcal{S}$, chaque fonction g_n est bornée sur $\mathbb{R}$. Si on fixe n, alors g_{n+2} est bornée sur $\mathbb{R}$: il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in \mathbb{R} \quad \big|g_{n+2}(t)\big| \leq M$, soit encore $\big|t^2\, g_n(t)\big| \leq M$, ou encore $\big|g_n(t)\big| \leq \dfrac{M}{t^2}$ pour $t \neq 0$, on peut donc écrire $g_n(t) = O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $\pm\infty$, ce qui entraîne l'intégrabilité de g_n sur $\mathbb{R}$.

b. Appliquons le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre (extension aux fonction $\mathcal{C}^k$). Reprenons la notation $h(x,t) = f(t)\, e^{-2i\pi xt}$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application partielle $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t) = (-2i\pi t)^n\, f(t)\, e^{2i\pi xt} = (-2i\pi)^n\, g_n(t)\, e^{2i\pi xt}\ .$$

Les applications partielles $t \mapsto \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ sont continues par morceaux et, surtout, pour tout n, on a la domination

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad \left|\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)\right| = (2\pi)^n\, \big|g_n(t)\big| \leq (2\pi)^n\, \big|g_n(t)\big|\ ,$$

la fonction $|g_n|$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après le **a.** Tout ceci nous permet d'affirmer que la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \big(\mathcal{F}(f)\big)^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)\,\mathrm{d}t = (-2i\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, f(t)\, e^{-2i\pi xt}\,\mathrm{d}t\ .$$

12.a. Il est clair que θ est intégrable sur $\mathbb{R}$, par exemple car $t^2\,\theta(t) \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par croissances comparées. Par parité et par le changement de variable $u = t\sqrt{\pi}$, on se ramène à l'intégrale de Gauss calculée dans la première partie:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1\ .$$

b. La fonction θ est continue sur $\mathbb{R}$ et $t^n\theta(t) = t^n e^{-\pi t^2} \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout n entier naturel, par croissances comparées. Or, une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui a des limites finies en $\pm\infty$ est toujours bornée sur $\mathbb{R}$ (*en effet, elle est bornée au voisinage des infinis, disons sur* $]-\infty, A]$ *et sur* $[B, +\infty[$ *avec* $A < B$*, puis elle est bornée sur le segment* $[A,B]$ *d'après le théorème des bornes atteintes.*) Donc $\theta \in \mathcal{S}$.

Avec la question **11.b.** puis une intégration par parties, on obtient, pour tout x réel,

$$\begin{aligned}
\big(\mathcal{F}(\theta)\big)'(x) &= -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t\,\theta(t)\, e^{-2i\pi xt}\,\mathrm{d}t \;=\; -2i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-\pi t^2}\, e^{-2i\pi xt}\,\mathrm{d}t \\
&= -2i\pi \left(\left[-\frac{1}{2\pi}\, e^{-\pi t^2}\, e^{-2i\pi xt} \right]_{t\to-\infty}^{t\to+\infty} - \frac{2i\pi x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\, e^{-2i\pi xt}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= -2\pi x\, \mathcal{F}(\theta)(x)\ .
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle $y' = -2\pi xy$.

c. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $x \mapsto C\, e^{-\pi x^2}$ avec $C \in \mathbb{C}$ constante. Il existe donc une constante $C \in \mathbb{C}$ telle que $\mathcal{F}(\theta) = C\theta$. Comme

$$\mathcal{F}(\theta)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)\,\mathrm{d}t = 1 = \theta(0)\ ,$$

on a donc $C = 1$ et finalement $\mathcal{F}(\theta) = \theta$.

PARTIE III. Formule d'inversion de Fourier

13. C'est une application du théorème de convergence dominée. Posons $u_n(x) = \mathcal{F}(f)(x)\,\theta\left(\dfrac{x}{n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Par continuité en 0 de la fonction θ avec $\theta(0) = 1$, on voit que, pour tout x fixé, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = \mathcal{F}(f)(x)$, autrement dit la suite de fonctions continues (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction continue $\mathcal{F}(f)$. Comme $\left|\theta(t)\right| \leq 1$ pour tout t réel, on a aussi la domination

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|u_n(x)\right| \leq \left|\mathcal{F}(f)(x)\right|\ ,$$

la fonction $\mathcal{F}(f)$ ayant été supposée intégrable sur $\mathbb{R}$. On peut donc affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

14. Encore de la convergence dominée, posons maintenant $v_n(t) = f\left(\dfrac{t}{n}\right)\,\theta(t)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et t réel. La fonction f étant continue en 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(t) = f(0)\,\theta(t)$ pour tout t, donc convergence simple de la suite de fonctions continues (v_n) vers la fonction continue $v : t \mapsto f(0)\,\theta(t)$. Par ailleurs, comme $f \in \mathcal{S}$, la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$, on a donc la domination

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \left|v_n(t)\right| \leq \|f\|_\infty\,\theta(t)\ .$$

La fonction θ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, cette domination permet d'intervertir limite et intégrale:

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} v_n = \int_{\mathbb{R}} v = f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)\ .$$

15. Posons $g(x,t) = f(t)\,e^{-2i\pi xt}\,\theta\left(\dfrac{x}{n}\right)$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, alors $\left|g(x,t)\right| = \left|f(t)\right|\,\theta\left(\dfrac{x}{n}\right)$ et, en posant $h_1(x) = \theta\left(\dfrac{x}{n}\right)$ et $h_2(t) = \left|f(t)\right|$, les hypothèses du "théorème de Fubini" sont clairement satisfaites. On obtient alors, en posant $x = ny$ dans l'intégrale intérieure et $t = \dfrac{s}{n}$ dans l'intégrale extérieure:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-2i\pi xt}\,\theta\Big(\frac{x}{n}\Big)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi xt}\,\theta\Big(\frac{x}{n}\Big)\,\mathrm{d}x\right) f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(y)\,e^{-2i\pi ys}\,n\,\mathrm{d}y\right) f\left(\frac{s}{n}\right)\frac{1}{n}\,\mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(y)\,e^{-2i\pi ys}\,\mathrm{d}y\right) f\left(\frac{s}{n}\right)\mathrm{d}s = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(\theta)(s)\,f\left(\frac{s}{n}\right)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(s)\, f\left(\frac{s}{n}\right) \mathrm{d}s \;=\; J_n$$

puisque $\mathcal{F}(\theta) = \theta$.

16. Comme $I_n = J_n$ pour tout n, en passant à la limite, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x)\, \mathrm{d}x = f(0)$.

Fixons maintenant t réel et translatons la variable en posant $h(u) = f(u+t)$ pour tout u réel. Pour tout n entier naturel, on a $u^n\, h(u) = u^n\, f(u+t) \underset{u\to\pm\infty}{\sim} (u+t)^n\, f(u+t)$ qui est borné au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$ puisque $f \in \mathcal{S}$, donc $u \mapsto u^n h(u)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ (car elle est continue donc aussi bornée sur tout segment), on a ainsi prouvé que $h \in \mathcal{S}$.

Une translation de la variable encore (poser $v = u + t$) montre que, pour tout x réel,

$$\mathcal{F}(h)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u+t)\, e^{-2i\pi xu}\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\, e^{-2i\pi x(v-t)}\, \mathrm{d}v = e^{2i\pi xt}\, \mathcal{F}(f)(x)\ .$$

La fonction $\mathcal{F}(h)$, ayant le même module que $\mathcal{F}(f)$, est donc aussi intégrable sur $\mathbb{R}$. Cela autorise à appliquer tout ce qui précède à la fonction h à la place de la fonction f. On a donc l'égalité $h(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(h)(x)\, \mathrm{d}x$, soit

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi xt}\, \mathcal{F}(f)(x)\, \mathrm{d}x = \mathcal{F}\big(\mathcal{F}(f)\big)(-t)\ .$$

17. Soit $f : t \mapsto e^{-|t|}$, il est clair que $f \in \mathcal{S}$, calculons sa transformée de Fourier: pour tout x réel,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(x) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\, e^{-2i\pi xt}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{(1-2i\pi x)t}\, \mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+2i\pi x)t}\, \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{e^{(1-2i\pi x)t}}{1-2i\pi x} \right]_{t\to-\infty}^{t=0} + \left[\frac{e^{-(1+2i\pi x)t}}{-(1+2i\pi x)} \right]_{t=0}^{t\to+\infty} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-2i\pi x} + \frac{1}{1+2i\pi x} \right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+2i\pi x} \right) = \frac{1}{1+4\pi^2 x^2}\ .
\end{aligned}$$

Cette transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ ce qui autorise à appliquer les résultats des questions précédentes, et notamment la question **16.** qui donne immédiatement la relation demandée.

PARTIE IV. Transformation de Fourier et produit de convolution

18. On a $0 \in \mathcal{E}$ et, si f et g appartiennent à $\mathcal{E}$, si λ est un réel, il existe M et M' positifs, ainsi que α et β strictement positifs tels que $\big|f(x)\big| \le M\, e^{-\pi\alpha^2x^2}$ et $\big|g(x)\big| \le M'\, e^{-\pi\beta^2x^2}$ pour tout x. En posant $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$, on a $\gamma > 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \big|\lambda\, f(x) + g(x)\big| \le |\lambda|\, \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big| \le (|\lambda|\, M + M')\, e^{-\pi\gamma^2x^2}\ ,$$

ce qui montre que $\lambda f + g \in \mathcal{E}$ (c'est bien une fonction continue). Donc $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Avec les mêmes notations, on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad \big|f(x)g(x)\big| \leq MM'\, e^{-\pi(\alpha^2+\beta^2)x^2} = MM'\, e^{-\pi\delta^2 x^2}$ avec $\delta = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} > 0$, ce qui prouve que $fg \in \mathcal{E}$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc aussi stable par produit.

19. Soient des réels M et M' positifs, λ et μ strictement positifs tels que $\big|u(x)\big| \leq M\, e^{-\pi\lambda^2 x^2}$ et $\big|v(x)\big| \leq M'\, e^{-\pi\mu^2 x^2}$. Posons enfin $g(x,t) = u(t)\, v(x-t)$. Alors g est continue sur $\mathbb{R}^2$, d'où la continuité des applications partielles et, en posant $\nu = \min\{\lambda, \mu\}$, on a

$$\big|g(x,t)\big| \leq MM'\, e^{-\pi\nu^2 t^2}\, e^{-\pi\nu^2 (x-t)^2} \leq MM'\, e^{-\pi\nu^2 t^2}\ ,$$

cette dernière fonction majorante (indépendante du paramètre x) étant intégrable sur $\mathbb{R}$. On en déduit (théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre) que la fonction $u * v$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

20. On pose le changement de variable $s = x - t$ dans l'intégrale définissant $(u * v)(x)$, et on trouve $(v * u)(x)$. *Le produit de convolution est donc commutatif.*

21. On s'inspire de la mise sous forme canonique d'un trinôme:

$$\begin{aligned} t^2 + (x-t)^2 - \frac{1}{3}(t^2+x^2) &= \frac{5}{3}t^2 - 2xt + \frac{2}{3}x^2 = \frac{5}{3}\left(t^2 - \frac{6}{5}xt + \frac{2}{5}x^2\right) \\ &= \frac{5}{3}\left(\left(t - \frac{3}{5}x\right)^2 - \left(\frac{3}{5}x\right)^2 + \frac{2}{5}x^2\right) \\ &= \frac{5}{3}\left(\left(t - \frac{3}{5}x\right)^2 + \frac{1}{25}x^2\right) \ \geq\ 0\ . \end{aligned}$$

22. Posons $g(x,t) = u(t)\, v(x-t)$. Alors g est continue sur $\mathbb{R}^2$, et on a, en reprenant les notations introduites et les majorations effectuées dans le corrigé de la question **19.**,

$$\big|g(x,t)\big| \leq M\, e^{-\pi\lambda^2 t^2}\, M'\, e^{-\pi\mu^2(x-t)^2} \leq MM'\, e^{-\pi\nu^2\left(t^2+(x-t)^2\right)}$$

avec $\nu = \min\{\lambda, \mu\} > 0$ puis, en utilisant la question **21.**,

$$\big|g(x,t)\big| \leq MM'\, e^{-\frac{1}{3}\pi\nu^2(x^2+t^2)} \leq MM'\, e^{-\frac{\pi\nu^2 x^2}{3}}\, e^{-\frac{\pi\nu^2 t^2}{3}} = h_1(x)\, h_2(t)\ ,$$

en posant $h_1 : x \mapsto M\, e^{-\frac{1}{3}\pi\nu^2 x^2}$ et $h_2 : t \mapsto M'\, e^{-\frac{1}{3}\pi\nu^2 t^2}$, ce sont des fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}$, on peut donc appliquer le théorème de Fubini:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, v(x-t)\, \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, v(x-t)\, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}t\ ,$$

soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (u * v)(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} v(x-t)\, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}t\ ,$$

soit

$$\int_{\mathbb{R}} (u * v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} v(y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}t \ ,$$

soit enfin $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (u * v) = \left(\int_{\mathbb{R}} u \right) \left(\int_{\mathbb{R}} v \right)$.

23. Fixons x réel et introduisons les fonctions U et V définies par $U(t) = u(t)\, e^{-2i\pi xt}$ et $V(t) = v(t)\, e^{-2i\pi xt}$ pour tout t. Comme $\big|U(t)\big| = \big|u(t)\big|$ et $\big|V(t)\big| = \big|v(t)\big|$, ces fonctions U et V appartiennent à $\mathcal{E}$, on peut donc leur appliquer ce qui précède, c'est-à-dire affirmer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} U * V = \left(\int_{\mathbb{R}} U \right) \left(\int_{\mathbb{R}} V \right)$.

Or, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} U = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, e^{-2i\pi xt}\, \mathrm{d}t = \mathcal{F}(u)(x)$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} V = \mathcal{F}(v)(x)$. Par ailleurs, pour tout t

$$\begin{aligned}
(U * V)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} U(s)\, V(t-s)\, \mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} u(s)\, e^{-2i\pi xs}\, v(t-s)\, e^{-2i\pi x(t-s)}\, \mathrm{d}s \\
&= e^{-2i\pi xt}\, (u * v)(t)\ .
\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} U * V = \mathcal{F}(u * v)(x)$. On en déduit la relation demandée, i.e. $\mathcal{F}(u * v) = \mathcal{F}(u)\, \mathcal{F}(v)$.

PROBLÈME 2

d'après de vieux manuscrits, non millésimés

1. Si l'on convient de coder 0 pour face et 1 pour pile, une issue de l'expérience correspond alors à un n-uplet d'éléments de $\{0, 1\}$, soit $\Omega = \{0, 1\}^n$. Donc son cardinal est $|\Omega| = 2^n$. La pièce étant supposée équilibrée, tous les résultats sont équiprobables, on munit donc Ω de la probabilité uniforme P telle que $\forall \omega \in \Omega \quad P\big(\{\omega\}\big) = \dfrac{1}{2^n}$.

2. • $N_1 = 1$ (variable aléatoire constante).

• Dans le cas de deux lancers, parmi les quatre résultats possibles (qui sont équiprobables), deux (PP et FF) correspondent à la réalisation de l'événement $\{N_2 = 1\}$, et deux (PF et FP) correspondent à la réalisation de l'événement $\{N_2 = 2\}$. Donc

$$N_2(\Omega) = \{1, 2\} \quad \text{et} \quad P(N_2 = 1) = P(N_2 = 2) = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}\ .$$

• Pour trois lancers, il y a 8 résultats équiprobables, parmi lesquels:

- 2 (PPP et FFF) réalisent $N_3 = 1$,
- 4 (PPF, PFF, FFP et FPP) réalisent $N_3 = 2$
- 2 (PFP et FPF) réalisent $N_3 = 3$.

Donc

$$N_3(\Omega) = \{1, 2, 3\} \quad \text{et} \quad P(N_3 = 1) = P(N_3 = 3) = \frac{1}{4}\ ,\ P(N_3 = 2) = \frac{1}{2}\ .$$

- Pour quatre lancers, il y a 16 résultats équiprobables, parmi lesquels:
  - 2 (PPPP et FFFF) réalisent $N_4 = 1$,
  - 6 (PPPF, PPFF, PFFF, FFFP, FFPP et FPPP) réalisent $N_4 = 2$
  - 6 (PPFP, PFFP, PFPP, FFPF, FPPF et FPFF) réalisent $N_4 = 3$
  - 2 (PFPF et FPFP) réalisent $N_4 = 4$.

  Donc

$$N_4(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{et} \quad P(N_4 = 1) = P(N_4 = 4) = \frac{1}{8} \quad \text{et} \quad P(N_4 = 2) = P(N_4 = 3) = \frac{3}{8} \,.$$

3. Posons $a_{i,j} = P(N_i = j)$ pour $(i,j) \in [\![1,4]\!]^2$, et disposons ces nombres dans une matrice

$$A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}), \text{ alors } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}. \text{ Cela ressemble un peu à un triangle de Pascal.}$$

On observe que, pour $(i,j) \in [\![1,4]\!]^2$, $a_{i,j} = P(X_i = j-1) = \dfrac{\binom{i-1}{j-1}}{2^{i-1}} = \binom{i-1}{j-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-j}$,

ce qui signifie que X_i suit la loi binomiale de paramètres $i-1$ et $\frac{1}{2}$ pour $i \in [\![2,4]\!]$.

4. $N_k(\Omega) = [\![1,k]\!]$ et $X_k(\Omega) = [\![0,k-1]\!]$.

5.a. On a, par hypothèse, $P(A \cap B_j) = P(A)\,P(B_j)$ pour tout j. D'autre part, par distributivité de l'intersection par rapport à la réunion, $A \cap B = A \cap \Big(\bigsqcup_{j=1}^{p} B_j\Big) = \bigsqcup_{j=1}^{p} (A \cap B_j)$, cette réunion étant disjointe. Donc

$$P(A \cap B) = \sum_{j=1}^{p} P(A \cap B_j) = \sum_{j=1}^{p} P(A)\,P(B_j) = P(A) \sum_{j=1}^{p} P(B_j) = P(A)\,P(B) \,.$$

Les événements A et B sont donc indépendants.

b. Notons que

$$\{Z_1 = z_1, \cdots, Z_k = z_k\} \cap E_{k+1} = \{Z_1 = z_1, \cdots, Z_k = z_k, Z_{k+1} = z_{k+1}\} \,.$$

L'indépendance des lancers permet de considérer les variables aléatoires $Z_1, \cdots, Z_{k+1}$ comme indépendantes. Chaque événement $\{Z_j = z_j\}$ est de probabilité $\frac{1}{2}$ (pièce équilibrée). Donc

$$P\big(\{Z_1 = z_1, \cdots, Z_k = z_k\} \cap E_{k+1}\big) = \prod_{j=1}^{k+1} P(Z_j = z_j) = \frac{1}{2^{k+1}} \,.$$

Par ailleurs, $E_{k+1} = \{Z_k = 0, Z_{k+1} = 0\} \sqcup \{Z_k = 1, Z_{k+1} = 1\}$ est aussi de probabilité $\frac{1}{2}$.

Donc
$$P\big(\{Z_1 = z_1, \cdots, Z_k = z_k\}\big) \cdot P(E_{k+1}) = \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{k+1}}\ ,$$
l'indépendance est démontrée.

c. L'événement $B = \{N_k = i\}$ est une réunion disjointe finie d'événements de la forme $\{Z_1 = z_1, \cdots, Z_k = z_k\}$ avec $(z_1, \cdots, z_k) \in \{0,1\}^k$, on conclut en utilisant **a.** et **b.** ci-dessus que les événements E_{k+1} et B sont indépendants.

6. L'événement E_{k+1} signifie que les k-ième et $(k+1)$-ième lancers ont donné le même résultat (soit deux piles, soit deux faces). On a bien sûr, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $i \in [\![1, k+1]\!]$,
$$\{N_{k+1} = i\} = \big(\{N_{k+1} = i\} \cap E_{k+1}\big) \sqcup \big(\{N_{k+1} = i\} \cap \overline{E_{k+1}}\big)\ ,$$
où le symbole $\sqcup$ signifie "réunion disjointe".

Or, $\{N_{k+1} = i\} \cap E_{k+1} = \{N_k = i\} \cap E_{k+1}$ (si l'événement E_{k+1} est réalisé, il y a le même nombre de séries dans les $k+1$ premiers lancers que dans les k premiers), et de la même façon, $\{N_{k+1} = i\} \cap \overline{E_{k+1}} = \{N_k = i-1\} \cap \overline{E_{k+1}}$. Par ailleurs, les événements E_{k+1} et $\overline{E_{k+1}}$ ont pour probabilité $\dfrac{1}{2}$, et sont indépendants des événements $\{N_k = i\}$ ou $\{N_k = i-1\}$ d'après **Q5.** Donc
$$\begin{aligned} P(N_{k+1} = i) &= P\big(\{N_k = i\} \cap E_{k+1}\big) + P\big(\{N_k = i-1\} \cap \overline{E_{k+1}}\big) \\ &= P(N_k = i)\, P(E_{k+1}) + P(N_k = i-1)\, P\big(\overline{E_{k+1}}\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(P(N_k = i) + P(N_k = i-1)\big)\ . \end{aligned}$$

7. Au vu de la question **3.**, il semble logique de vouloir prouver que X_k suit la loi binomiale $\mathcal{B}\Big(k-1, \dfrac{1}{2}\Big)$ pour $k \geq 2$. La propriété est donc déjà initialisée.

Soit $k \in [\![2, n-1]\!]$, supposons $X_k \sim \mathcal{B}\Big(k-1, \dfrac{1}{2}\Big)$. On sait déjà que $X_{k+1}(\Omega) = [\![0, k]\!]$ et, en utilisant la question **6.**, on a, pour $i \in [\![0, k]\!]$,
$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = i) &= P(N_{k+1} = i+1) \\ &= \frac{1}{2}\big(P(N_k = i+1) + P(N_k = i)\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(P(X_k = i) + P(X_k = i-1)\big) \\ &= \frac{1}{2}\left[\binom{k-1}{i}\frac{1}{2^{k-1}} + \binom{k-1}{i-1}\frac{1}{2^{k-1}}\right] \qquad (\textbf{HR}) \\ &= \frac{1}{2^k}\binom{k}{i} \qquad \text{(par la relation de Pascal)}\ , \end{aligned}$$
ce qui montre que $X_{k+1} \sim \mathcal{B}\Big(k, \dfrac{1}{2}\Big)$ et achève la récurrence.

8. D'après le cours de première année, $\mathrm{E}(X_k) = \dfrac{k-1}{2}$ et $\mathrm{V}(X_k) = \dfrac{k-1}{4}$. Comme $N_k = X_k + 1$, de la linéarité de l'espérance, on tire $\mathrm{E}(N_k) = \dfrac{k+1}{2}$ et, de la relation $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$, on tire $\mathrm{V}(N_k) = \mathrm{V}(X_k) = \dfrac{k-1}{4}$.

9. D'abord $L_1(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

Parmi les 2^n lancers équiprobables de la pièce, seulement deux (PPP...PPP et FFF...FFF) conduisent à la réalisation de l'événement $\{L_1 = n\}$. Donc $P(L_1 = n) = \dfrac{2}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Pour abréger, pour $i \in [\![1, n]\!]$, notons $P_i = \{Z_i = 1\}$ l'événement: "le i-ième lancer donne Pile" et $F_i = \overline{P_i}$ l'événement contraire.

Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a

$$\{L_1 = k\} = \Big(P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_k \cap F_{k+1}\Big) \bigsqcup \Big(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}\Big) .$$

Les variables aléatoires $Z_1, \cdots, Z_n$ étant mutuellement indépendantes, il en va de même des événements qui leur sont associés, donc

$$P(L_1 = k) = P(P_1) \cdots P(P_k) P(F_{k+1}) + P(F_1) \cdots P(F_k) P(P_{k+1}) = 2 \times \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k} .$$

On vérifie que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(L_1 = k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \times 2 \times \Big(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\Big) + \frac{1}{2^{n-1}} = 1.$