DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 7

PSI2 2024-2025 **à rendre le jeudi 30/01/2025**

EXERCICE

Pour $(P,Q) \in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1.a. Vérifier la convergence de cette intégrale.

b. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

c. Calculer $(X^k|\,1)$ pour tout k entier naturel.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P) = XP'' + (1-X)\,P'$.

2.a. Montrer que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Écrire la matrice de φ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

c. Montrer que φ est diagonalisable.

3. Soit $k \in [\![0,n]\!]$.

a. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $V_k = \mathrm{Ker}\,\big(\varphi + k\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}\big)$?

b. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\varphi(P_k) = -k\,P_k$.

c. Montrer que $\deg(P_k) = k$ pour tout k. Déterminer P_0, P_1 et P_2.

4. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$.

a. Calculer $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(t\,P'(t)\,e^{-t}\big)$, puis prouver l'égalité $\big(\varphi(P)|Q\big) = \big(P|\varphi(Q)\big)$.

b. En déduire que la famille $(P_0,\cdots,P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

5.a. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} P_n(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le polynôme P_n admet au moins une racine de multiplicité impaire dans $\mathbb{R}_+^*$.

c. Soient $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$ les racines d'ordre impair de P_n dans $\mathbb{R}_+^*$, soit $Q = \displaystyle\prod_{k=1}^{r}(X - x_k)$.

En considérant le produit scalaire $(P_n|Q)$, montrer que $r = n$. Quelle propriété des polynômes P_n a-t-on ainsi démontré ?

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note x_1, $\cdots$, x_n les racines du polynôme P_n.

a. Montrer qu'il existe un unique n-uplet de réels $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \qquad \int_0^{+\infty} P(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,P(x_i)\,. \qquad \textbf{(*)}$$

On commencera par montrer qu'il suffit que cette relation soit vraie pour les polynômes 1, X, $\cdots$, X^{n-1} *de la base canonique de* $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, *et on écrira un système linéaire.*

b. Montrer qu'alors la relation **(*)** est satisfaite pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$.
On posera la division euclidienne de P *par le polynôme* P_n.

c. Le polynôme $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)^2$ vérifie-t-il la relation **(*)**, avec les mêmes coefficients λ_i ?

PROBLÈME

PARTIE A. Une généralisation des séries entières.

Pour n entier naturel et x réel strictement positif, on pose

$$u_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \ , \qquad v_n(x) = \frac{1}{(n+1)^x} \ , \qquad w_n(x) = \frac{u_n(x)}{v_n(x)} \ .$$

1.a. Simplifier l'expression $\dfrac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. En déduire la convergence de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right)$.

b. En déduire l'existence d'un réel strictement positif $l(x)$, dépendant de x, tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n(x)}{v_n(x)} = l(x) \ .$$

2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n u_n(x)$ converge absolument si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n v_n(x)$ converge absolument.

3. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des suites complexes $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n u_n(x)$ soit absolument convergente pour tout réel strictement positif x.

a. Donner un exemple d'élément a de $\mathcal{A}$ avec a_n non nul pour tout n.

b. Donner un exemple de suite n'appartenant pas à $\mathcal{A}$.

4. Si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite appartenant à $\mathcal{A}$, on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, u_n(x) \ .$$

a. Montrer que la fonction f_a est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = 0$.

PARTIE B. Représentation intégrale.

5.a. Soit n un entier naturel. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = \displaystyle\prod_{0\leq i\leq n \ , \ i\neq k} (X+i)$.

Montrer que la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

b. En déduire l'existence de réels $\alpha_0, \cdots, \alpha_n$ (indépendants de x) tels que

$$\forall x > 0 \qquad \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{x+k} \ .$$

Exprimer α_k en fonction de k et de n.

6. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-y)^{x-1+k} \, \mathrm{d}y$, et calculer sa valeur en fonction de k et de x.

7. Montrer que

$$\forall x > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^1 (1-y)^{x-1}\, y^n \,\mathrm{d}y = u_n(x) \ .$$

En déduire que, si $a \in \mathcal{A}$, alors

$$\forall x > 0 \qquad f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 (1-y)^{x-1}\, y^n \,\mathrm{d}y \ .$$

8. Soit $a \in \mathcal{A}$.

a. Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n y^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

Pour tout $y \in]-1,1[$, on pose $\displaystyle\varphi_a(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$.

b. Prouver la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f_a(x) = \int_0^1 (1-y)^{x-1}\, \varphi_a(y) \,\mathrm{d}y \ .$$

9. Soit la suite $a = (a_n)$ avec $a_0 = 0$ et $a_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a \in \mathcal{A}$ et calculer $f_a(x)$ pour $x > 0$.

PARTIE C. Dérivation.

Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$.

10.a. Montrer que la fonction f_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$\forall x > 0 \qquad f_a'(x) = \int_0^1 (1-y)^{x-1}\, \varphi_a(y)\, \ln(1-y) \,\mathrm{d}y \ .$$

b. Montrer que la fonction $\psi_a : y \mapsto \varphi_a(y)\, \ln(1-y)$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$.

On note $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de coefficients tels que $\displaystyle\forall y \in]-1,1[\quad \psi_a(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n y^n$.

c. Déterminer b_0. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer b_n à l'aide des a_p $(0 \leq p \leq n-1)$.

11. Pour $x > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|b_n|}{(n+1)^x} \leq \sum_{p=0}^{N-1} |a_p| \left(\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^x} \right) .$$

12. Pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq N-1$, montrer que

$$\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^x} \leq \frac{1}{(p+1)^x} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+p+1)^x} \ .$$

13. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-p} \frac{1}{k(k+p+1)^x} \leq \frac{\ln(p+1)}{(p+1)^x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \frac{1}{(p+1)^x}$.

Par la relation de Chasles, on pourra découper l'intégrale en une intégrale sur $[1, p+1]$*, plus une intégrale sur* $[p+1, +\infty[$.

14. En déduire que $b \in \mathcal{A}$ et que $f_a' = f_b$.