DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 5

PSI2 2024-2025 **le 18/01/2025**

PROBLÈME 1

PARTIE I. Un calcul de l'intégrale de Gauss

1. Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

On introduit les fonctions f et g définies par

$$f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

2. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, exprimer $f'(x)$ pour x réel.

3. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire. Calculer $g(0)$.

4. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et donner une expression de $g'(x)$.

5. À l'aide d'un changement de variable affine, prouver la relation $g'=-2ff'$.

6. En déduire que la fonction f^2+g est constante, et préciser sa valeur.

7. En déduire la relation $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

PARTIE II. Définition de la transformation de Fourier

On note $L^1(\mathbb{R})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que, pour tout k entier naturel, la fonction $t\mapsto t^k\,f(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Si $f\in L^1(\mathbb{R})$, sa **transformée de Fourier** est la fonction $\mathcal{F}(f):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, définie par

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \mathcal{F}(f)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-2i\pi xt}\,\mathrm{d}t\ .$$

8. Soit φ la fonction "créneau" définie par $\forall t\in\mathbb{R}\quad \varphi(t)=\begin{cases}1 \ \text{si } |t|\leq \dfrac{1}{2}\\ 0\ \text{sinon}\end{cases}$.

Vérifier que $\varphi\in L^1(\mathbb{R})$ et calculer sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(\varphi)$.

9. On considère la fonction $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ définie par

$$\forall t\in\mathbb{R}^*\quad \psi(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\ ,\quad \text{et}\quad \psi(0)=1\ .$$

a. Justifier que ψ est développable en série entière. Préciser ce développement et son rayon de convergence. En déduire que ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad \int_n^{n+1}\big|\psi(t)\big|\,\mathrm{d}t\geq\frac{2}{(n+1)\pi^2}\ .$$

En déduire que ψ n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R})$.

10. Soit $f\in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}$.

11. Soit $f \in \mathcal{S}$.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n\, f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \big(\mathcal{F}(f)\big)^{(n)}(x) = (-2i\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, f(t)\, e^{-2i\pi xt}\, \mathrm{d}t\ .$$

12. Soit la fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\theta(t) = e^{-\pi t^2}$.

a. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)\, \mathrm{d}t$.

b. Justifier que $\theta \in \mathcal{S}$, et que sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle $y' + 2\pi xy = 0$.

c. En déduire que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$.

PARTIE III. Formule d'inversion de Fourier

On admettra dans cette partie et la suivante le **théorème de Fubini**: *Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application continue. S'il existe deux fonctions $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ et $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, continues sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$, telles que*

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad \big|g(x,t)\big| \leq h_1(x)\, h_2(t)\ ,$$

alors les "intégrales doubles" $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,t)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,t)\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$ *existent et ont la même valeur.*

Soit $f \in \mathcal{S}$, on suppose que sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout n entier naturel non nul, on pose

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x)\, \theta\left(\frac{x}{n}\right) \mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) \theta(t)\, \mathrm{d}t\ ,$$

la fonction θ (appelée "gaussienne") ayant été introduite à la question **12.**

13. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x)\, \mathrm{d}x$.

14. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} J_n$.

15. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_n = J_n$. *On rappelle que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$.*

16. Montrer que $f(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x)\, \mathrm{d}x$ puis montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \mathcal{F}\big(\mathcal{F}(f)\big)(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(x)\, e^{2i\pi tx}\, \mathrm{d}x\ .$$

On pourra pour cela introduire la fonction $h : u \mapsto f(u+t)$.

Cette formule permet de reconstruire le signal f à partir de sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$.

17. Une application: montrer, pour tout t réel, la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi xt}}{1 + 4\pi^2 x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\, e^{-|t|}\ .$$

PARTIE IV. Transformation de Fourier et produit de convolution

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continues sur $\mathbb{R}$, telles qu'il existe deux réels strictement positifs M et α tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \big|f(x)\big| \leq M\,\theta(\alpha x)\ , \quad \text{i.e.} \quad \big|f(x)\big| \leq M\, e^{-\pi\alpha^2 x^2}\ .$$

18. Montrer que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et que cet ensemble est stable par produit.

Dans tout ce qui suit, u et v sont deux éléments de $\mathcal{E}$.
Pour tout réel x tel que cela ait un sens, on pose

$$(u * v)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, v(x-t)\, \mathrm{d}t\ .$$

19. Montrer que $u * v$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

20. Montrer que $v * u = u * v$.

21. Soient x et t deux réels. Prouver l'inégalité

$$t^2 + (x-t)^2 \geq \frac{1}{3}(t^2 + x^2)\ .$$

On pourra s'inspirer de la mise d'un trinôme sous forme canonique.

22. En utilisant le théorème de Fubini, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} u * v = \left(\int_{\mathbb{R}} u\right)\left(\int_{\mathbb{R}} v\right)\ .$$

23. Montrer enfin que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{F}(u*v)(x) = \mathcal{F}(u)(x) \cdot \mathcal{F}(v)(x)\ .$$

PROBLÈME 2

Soit n un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants d'une pièce équilibrée. Le résultat de cette expérience aléatoire est codé par une suite de n lettres P (pile) ou F (face), par exemple, avec $n = 10$, la suite FFPPPPFPPP. On appelle **série** toute succession de lancers conduisant à des résultats identiques, on s'intéresse dans cet exercice au nombre de séries obtenues lors des n lancers. Dans l'exemple ci-dessus, il y a quatre séries, qui sont successivement FF, puis PPPP, puis F, et enfin PPP.

Plus précisément, pour tout k de 1 à n, on note N_k le nombre de séries obtenues lors des k premiers lancers de la pièce. Dans l'exemple ci-dessus, on a

$$N_1 = N_2 = 1\ ,\ N_3 = N_4 = N_5 = N_6 = 2\ ,\ N_7 = 3\ ,\ N_8 = N_9 = N_{10} = 4\ .$$

On admettra que les N_k sont des variables aléatoires sur un certain univers fini Ω. On définira enfin, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, une variable aléatoire X_k par la relation $X_k = N_k - 1$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note Z_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le k-ième lancer donne pile, et 0 sinon. Pour $k \in [\![2, n]\!]$, on considère l'événement $E_k = \{Z_k = Z_{k-1}\}$.

1. Quel univers Ω vous semble-t-il naturel d'introduire pour modéliser cette expérience aléatoire ? Quel est son cardinal ? De quelle probabilité convient-il de munir cet univers ?

2. Déterminer (*rapidement!*) les lois des variables N_1, N_2, N_3, N_4.

3. Observer que les variables aléatoires X_k, avec $2 \leq k \leq 4$, suivent des lois binomiales dont on précisera les paramètres.

4. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, préciser les ensembles-images $N_k(\Omega)$ et $X_k(\Omega)$.

5. Soient $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $i \in [\![1, k]\!]$. L'objectif de cette question est de montrer que les événements $\{N_k = i\}$ et E_{k+1} sont indépendants. *On pourra éventuellement admettre ce résultat.*

a. Soit A un événement, soit $(B_j)_{1 \leq j \leq p}$ une famille d'événements deux à deux disjoints (i.e. incompatibles). On suppose que, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, les événements A et B_j sont indépendants. Montrer que les événements A et $B = \bigcup_{j=1}^{p} B_j$ sont indépendants.

b. Soit $(z_1, \cdots, z_k) \in \{0, 1\}^k$. Montrer que les événements $\{Z_1 = z_1, \cdots, Z_k = z_k\}$ et E_{k+1} sont indépendants.

c. En déduire l'indépendance des événements $\{N_k = i\}$ et E_{k+1}.

6. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $i \in [\![1, k+1]\!]$, en utilisant le système complet d'événements $(E_{k+1}, \overline{E_{k+1}})$, prouver la relation

$$P(N_{k+1} = i) = \frac{1}{2}\left(P(N_k = i) + P(N_k = i-1)\right).$$

7. En déduire, par récurrence, que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, la variable X_k suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

8. En déduire l'espérance et la variance de N_k, avec $1 \leq k \leq n$.

9. Dans cette question, on note L_1 la variable aléatoire donnant la longueur de la première série de résultats consécutifs identiques lors de n lancers de la pièce. Dans l'exemple où l'issue de l'expérience est la suite FFPPPPFPPP, on a donc $L_1 = 2$. Déterminer $P(L_1 = n)$, puis $P(L_1 = k)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$. *On s'assurera que la somme de ces probabilités vaut* 1.