DS de MATHÉMATIQUES numéro 5 COMMENTAIRES
PSI2 2024-2025

PROBLÈME 1

COMMENTAIRES GÉNÉRAUX:

JE NE VEUX PLUS VOIR DANS VOS COPIES D'INÉGALITÉS ENTRE DES NOMBRES COMPLEXES!!!, il y en a pourtant un peu partout, sous forme "visible" comme des majorations par $e^{2i\pi xt}$ avec x et t réels, ou moins visible comme des majorations par $f(t)$, sans mettre de module, avec f fonction à valeurs complexes! Cette remarque signifie aussi que **la plupart des majorations que vous êtes amenés à faire en analyse (pour montrer une sommabilité ou une intégrabilité, ou une convergence normale, ou une domination) sont des majorations de valeurs absolues ou de modules, merci donc de ne pas oublier de mettre les barres $|\cdot|$ correspondantes.**

NE PAS AFFIRMER N'IMPORTE QUOI SANS SE POSER DE QUESTION!!! Une des bêtises le plus souvent lues dans ce dernier DS est l'affirmation qu'une fonction constante est intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est évidemment faux (sauf pour la fonction nulle).

2. L'existence de $f(x)$ pour tout x réel n'a rien à voir avec la convergence de l'intégrale de Gauss démontrée en **Q1.** Mentionner ici le **théorème fondamental de l'analyse** (oui, oui, en l'écrivant en toutes lettres).

3. Ici, $g(x)$ existe car c'est l'intégrale d'une fonction continue sur le **segment** $[0,1]$, il n'y a pas lieu de majorer quoi que ce soit dans cette question!

4. Des "dominations" souvent maladroites ou carrément fausses. Pour se faciliter la vie, on peut se placer sur un segment $[-a,a]$ avec $a>0$ (donc un segment symétrique par rapport à l'origine), c'est plus facile à écrire. On peut aussi utilser le théorème des bornes atteintes pour "dominer" par une constante que l'on n'a pas besoin d'expliciter pour $(x,t)\in S\times[0,1]$ où S est un segment de $\mathbb{R}$, car $S\times[0,1]$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.

7. On peut utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu pour montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, mais on l'obtient plus facilement (me semble-t-il) par un encadrement.

9.b. Le passage de la non-sommabilité de $\left(\dfrac{2}{(n+1)\pi^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à la non-intégrabilité de ψ sur $\mathbb{R}_+^*$ est souvent confus: un argument clair (mais jamais vu sur une copie!) est de dire que les intégrales partielles ne sont pas majorées.

Attention à la précision du vocabulaire: dire que la suite $\left(\dfrac{2}{(n+1)\pi^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ "n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$" est bien sûr une ineptie. C'est une suite (variable entière), ce n'est pas une fonction.

10. Une confusion fréquente: ce n'est pas parce que l'intégrale $\mathcal{F}(f)(x)$ est convergente pour tout réel x que la fonction $x\mapsto\mathcal{F}(f)(x)$ est bornée!

12.b. Pour passer de $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\theta(x)=0$ à "θ est bornée sur $\mathbb{R}$", il faut détailler la preuve en utilisant le théorème des bornes atteintes (se ramener donc à un segment).

PROBLÈME 2

Il faut se replonger dans l'univers (sans jeu de mots) des proba! Justement, beaucoup d'entre vous n'ont pas compris ce que représente l'univers en probabilités: il s'agit d'un ensemble dont les éléments doivent décrire toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire étudiée. Pour n lancers successifs d'une pièce, cet univers doit donc être l'ensemble $\{P, F\}^n$, ou bien sûr $\{0, 1\}^n$ si l'on code par 0 et 1 les deux issues possibles à chaque lancer. On a donc $\mathrm{Card}(\Omega) = 2^n$ et, si la pièce est équilibrée, toutes ces issues sont équiprobables, donc Ω est muni de la probabilité uniforme.