

**Calcul intégral**

Théorème de convergence dominée.

Théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Théorèmes de continuité et de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre. Extension aux fonctions de classe  $C^k$ . Adaptation des théorèmes au cas où la condition de domination est vérifiée sur tout segment.

Théorème d'intégration terme à terme.

**Espaces préhilbertiens et euclidiens**

Espaces préhilbertiens, notamment projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt: *cf.* programme précédent.

Toute forme linéaire sur un espace euclidien est de la forme  $x \mapsto (a|x)$ . Vecteur normal à un hyperplan. Distance d'un vecteur à un hyperplan, à une droite. Expression de l'image d'un vecteur par une réflexion.

Isométries vectorielles (ou automorphismes orthogonaux) d'un espace euclidien. Caractérisations: conservation du produit scalaire, image d'une base orthonormale. Groupe orthogonal  $O(E)$ .

Matrices orthogonales. Définition par  $A^T A = I_n$ . Caractérisations utilisant les lignes ou les colonnes. Utilisations comme matrices de passage entre deux bases orthonormales d'un espace euclidien, comme matrices représentant une isométrie vectorielle dans un espace euclidien rapporté à une base orthonormale. Groupe orthogonal  $O_n(\mathbb{R})$  ou  $O(n)$ , groupe spécial orthogonal  $SO_n(\mathbb{R})$  ou  $SO(n)$ .

Endomorphismes autoadjoints (ou symétriques) d'un espace euclidien. Définition, propriétés élémentaires, espace vectoriel  $\mathcal{S}(E)$ . Représentation par une matrice symétrique dans une base orthonormale.

*Pas encore de théorème spectral.*

---

**Démonstrations de cours ou proches du cours**

- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité. Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.
- Montrer qu'une famille orthogonale finie de vecteurs non nuls est libre.
- Montrer que, si  $V$  est de dimension finie dans  $E$  préhilbertien, alors  $V \oplus V^\perp = E$  et  $(V^\perp)^\perp = V$ .  
Expression du projeté orthogonal d'un vecteur  $x$  de  $E$  sur  $V$ . Distance de  $x$  à  $V$ .
- Description (algorithmique et géométrique) du procédé de Gram-Schmidt.
- Problème de la régression linéaire (droite des moindres carrés), interprétation en termes de projection orthogonale sur un s.e.v.
- Dans  $E$  euclidien, expression de la réflexion d'hyperplan  $H = (\text{Vect}(a))^\perp$ , expression de la distance d'un vecteur  $x$  à cet hyperplan.
- Un projecteur est autoadjoint si et seulement si c'est un projecteur orthogonal