ENDOMORPHISMES des ESPACES EUCLIDIENS

I. Isométries vectorielles.

Définition. Soit E un espace euclidien, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On dit que u est une **isométrie vectorielle** s'il conserve la norme des vecteurs, i.e.

$$\forall x \in E \qquad \big\|u(x)\big\| = \|x\| \ .$$

Il est immédiat qu'un tel endomorphisme est nécessairement injectif (si $u(x) = 0_E$, alors $\|x\| = 0$ donc $x = 0_E$), donc bijectif car E est de dimension finie, c'est donc un automorphisme de l'espace vectoriel E. Les isométries vectorielles de l'espace euclidien E sont aussi appelés **automorphismes orthogonaux**.

On dispose de différentes caractérisations de ces endomorphismes.

Caractérisation 1. Un endomorphisme u d'un espace euclidien E est une isométrie si et seulement s'il conserve le produit scalaire, i.e. si et seulement si

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad \big(u(x)|u(y)\big) = (x|y) \ .$$

Preuve. Il est évident que la conservation du produit scalaire entraîne la conservation de la norme puisque $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ pour tout vecteur x de E.

La réciproque résulte des identités de polarisation. En effet, si $u \in \mathcal{L}(E)$ conserve la norme, si x et y sont deux vecteurs de E, alors

$$\begin{aligned}
\big(u(x)|u(y)\big) &= \frac{1}{4}\Big(\big\|u(x)+u(y)\big\|^2 - \big\|u(x)-u(y)\big\|^2\Big) && \text{(polarisation)}\\
&= \frac{1}{4}\Big(\big\|u(x+y)\big\|^2 - \big\|u(x-y)\big\|^2\Big) && \text{(linéarité de } u\text{)}\\
&= \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\Big) && \text{(conservation de la norme)}\\
&= (x|y) \ , && \text{(polarisation)}
\end{aligned}$$

et u conserve donc le produit scalaire.

Caractérisation 2. Un endomorphisme u d'un espace euclidien E est une isométrie si et seulement s'il transforme une base orthonormale en une base orthonormale.

Commentaire. Il y a ambiguïté sur le premier "une". En fait, il y a équivalence entre les trois assertions ci-dessous:

(i): u est une isométrie vectorielle ;

(ii): u transforme **toute** BON de E en une BON ;

(iii): il existe une BON de E dont l'image par u est une BON.

Preuve.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): *si u est une isométrie de E et si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une BON de E, alors $(e_i|e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout couple (i,j). La conservation du produit scalaire donne alors $\big(u(e_i)|u(e_j)\big) = \delta_{i,j}$ pour tout (i,j), la famille image $u(\mathcal{B}) = \big(u(e_1), \cdots, u(e_n)\big)$ est donc orthonormale, donc libre et, comme elle est de cardinal $n = \dim(E)$, c'est bien une BON de E.*

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): *évident!*

(iii) $\Longrightarrow$ (i): *Supposons qu'il existe une BON $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que l'image $u(\mathcal{B}) = \big(u(e_1), \cdots, u(e_n)\big)$ est aussi une BON. Si x est un vecteur de E, on le décompose dans la base $\mathcal{B}$: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, et comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Par linéarité, $u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)$ et, comme la famille $u(\mathcal{B})$ est aussi une base orthonormale, on a $\big\|u(x)\big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2$, donc u conserve la norme, c'est bien une isométrie.*

<u>Proposition et définition.</u> L'ensemble des isométries vectorielles de l'espace euclidien E est muni d'une structure de groupe pour la loi $\circ$ de composition, on l'appelle le groupe orthogonal de E, et on le note $\mathrm{O}(E)$.

Preuve. L'ensemble $\mathrm{O}(E)$ *est un sous-groupe du groupe linéaire* $\mathrm{GL}(E)$*. Ces notions générales de groupe et de sous-groupe ne figurent en fait pas à votre programme. Sans approfondir, disons simplement que cela traduit les propriétés suivantes:*

- la composée de deux isométries est encore une isométrie ;

- l'identité id_E est une isométrie ;

- si u est une isométrie, la bijection réciproque u^{-1} est encore une isométrie.

Les preuves sont immédiates en utilisant la conservation de la norme.

<u>Proposition.</u> Si $u \in \mathrm{O}(E)$, si F est un s.e.v. de E stable par u, alors son orthogonal $F^\perp$ est stable par u.

Preuve. Dire que F est stable par u signifie a priori que $u(F) \subset F$, mais comme u est une application linéaire injective, elle conserve les dimensions (appliquer le théorème du rang à la restriction $u|_F$), donc $u(F) = F$. Si l'on prend maintenant un vecteur x dans $F^\perp$, et un vecteur y dans F, d'après la remarque ci-dessus, on a aussi $y \in u(F)$ donc il existe $z \in F$ tel que $y = u(z)$, puis, en utilisant la conservation du produit scalaire,

$$\big(u(x)|y\big) = \big(u(x)|u(z)\big) = (x|z) = 0\ .$$

On a ainsi montré que $u(x) \in F^\perp$, ce qu'il fallait prouver.

<u>Proposition.</u> Si $u \in \mathrm{O}(E)$, alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.

Preuve. Si un réel λ est valeur propre de u, si $x \in E \setminus \{0_E\}$ est un vecteur propre associé, on a $u(x) = \lambda x$, puis $\big\|u(x)\big\| = |\lambda|\,\|x\|$. Mais d'autre part $\big\|u(x)\big\| = \|x\|$, donc $|\lambda| = 1$.

<u>Exemple des symétries orthogonales.</u> Soit F un s.e.v. de E euclidien. La **symétrie orthogonale par rapport à** F est la symétrie par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$, c'est aussi l'endomorphisme s_F de E défini par $s_F = 2p_F - \mathrm{id}_E$, où p_F est le projecteur orthogonal sur F. Alors s_F est une isométrie: en effet, si $x \in E$, on le décompose en $x = y+z$ avec $y = p_F(x) \in F$ et $z \in F^\perp$, on a alors $s_F(x) = y - z$. Comme les vecteurs y et z (ou $-z$) sont orthogonaux, le théorème de Pythagore donne

$$\big\|s_F(x)\big\|^2 = \|y\|^2 + \|-z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2\ ,$$

donc $s_F \in \mathrm{O}(E)$.

<u>Exercice.</u> Dans un espace euclidien E, montrer qu'une symétrie s est une isométrie si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

<u>Cas particulier des réflexions.</u> Soit H un hyperplan dans E euclidien. La symétrie orthogonale par rapport à H, notée s_H, est aussi appelée **réflexion d'hyperplan** H. Si a est un vecteur **unitaire** normal à H, en notant $D = \mathrm{Vect}(a) = H^\perp$, on sait que pour tout vecteur x de E, on a $p_D(x) = (a|x)a$, puis $p_H(x) = x - p_D(x) = x - (a|x)a$, et enfin

$$s_H(x) = p_H(x) - p_D(x) = x - 2\,(a|x)\,a\ .$$

II. Matrices orthogonales.

Définition. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** si elle vérifie $A^\top A = I_n$.

On sait, par ailleurs, que, si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, la relation $AB = I_n$ entraîne $BA = I_n$, et signifie finalement que A est inversible avec $A^{-1} = B$.

On a donc les équivalences:

$$A \text{ est orthogonale} \iff A^\top A = I_n \iff AA^\top = I_n \iff A \text{ est inversible et } A^{-1} = A^\top .$$

Il est clair aussi que A est orthogonale *si et seulement si* sa transposée $A^\top$ est orthogonale.

Voyons comment cela se traduit sur les lignes ou les colonnes de la matrice A. Posons $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, soit $C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ le j-ème vecteur-colonne de cette matrice. Pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient d'indices (i,j) de la matrice-produit $A^\top A$ est

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (A^\top)_{i,k} (A)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,j} = (C_i | C_j) ,$$

i.e. c'est le produit scalaire (canonique) des vecteurs C_i et C_j dans $\mathbb{R}^n$.

On en déduit que A est orthogonale *si et seulement si* $(C_i|C_j) = \delta_{i,j}$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, i.e. *si et seulement si* la famille $(C_1, \cdots, C_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire canonique).

Comme A est orthogonale *si et seulement si* sa transposée l'est, on a donc la même caractérisation portant sur les vecteurs-lignes $L_i^\top = \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ si on les considère aussi comme des éléments de $\mathbb{R}^n$ (d'où l'utilisation du symbole $^\top$ pour transformer ces vecteurs-lignes en des matrices-colonnes). Finalement, en considérant que $(\cdot|\cdot)$ représente le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} A \text{ est orthogonale} &\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad (C_i|C_j) = \delta_{i,j} \\ &\iff (C_1, \cdots, C_n) \quad \text{est une base orthonormale de } \mathbb{R}^n \\ &\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad (L_i^\top | L_j^\top) = \delta_{i,j} \\ &\iff (L_1^\top, \cdots, L_n^\top) \quad \text{est une base orthonormale de } \mathbb{R}^n . \end{aligned}$$

Pour vérifier pratiquement qu'une matrice est orthogonale, on peut s'assurer que:

- sur chaque colonne, la somme des carrés des coefficients vaut 1 ;

- sur deux colonnes distinctes, la somme des produits deux à deux des coefficients est nulle.

On peut bien sûr faire cette vérification sur les lignes au lieu des colonnes.

Exemples. Le lecteur vérifiera que les matrices $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont orthogonales.

Proposition et définition. L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est muni d'une structure de groupe pour le produit matriciel, on l'appelle groupe orthogonal d'ordre n, et on le note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, ou encore $\mathrm{O}(n)$.

Preuve. L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe linéaire matriciel $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Cela traduit les propriétés suivantes:

- le produit de deux matrices orthogonales est encore une matrice orthogonale ;

- la matrice-identité I_n est une matrice orthogonale ;

- si A est une matrice orthogonale, son inverse A^{-1} est encore une matrice orthogonale.

Les preuves sont immédiates en utilisant la caractérisation par $A^\top A = I_n$.

Proposition. Si A est une matrice orthogonale, alors $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Preuve. En effet, si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors $A^\top A = I_n$. En passant aux déterminants, on a

$$\det(A^\top)\ \det(A) = \big(\det(A)\big)^2 = 1\ .$$

Proposition et définition. L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n et de déterminant $+1$ est un sous-groupe du groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on l'appelle groupe spécial orthogonal d'ordre n, et on le note $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, ou encore $\mathrm{SO}(n)$. Les matrices appartenant à $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont dites "orthogonales directes".

Preuve. Cela traduit les propriétés suivantes, qui sont immédiates:

- le produit de deux matrices orthogonales directes est encore une matrice orthogonale directe ;

- la matrice-identité I_n est une matrice orthogonale directe;

- si A est une matrice orthogonale directe, son inverse A^{-1} est encore une matrice orthogonale directe.

Remarque. Les matrices orthogonales de déterminant -1 sont dites "**indirectes**". Elles ne constituent pas un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ puisque le produit de deux matrices orthogonales indirectes est une matrice orthogonale directe.

Les matrices orthogonales sont utilisées comme matrices de changement de base orthonormale, plus précisément:

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale d'un espace euclidien E, soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E. Alors la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est orthogonale si et seulement si la base $\mathcal{B}'$ est orthonormale.

Preuve. Posons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$, et $P = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$. Comme la base $\mathcal{B}$ est orthonormale, le produit scalaire *de deux vecteurs e'_j et e'_k est la somme des produits deux à deux de leurs coordonnées, soit $(e'_j|e'_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,k}$. La base $\mathcal{B}'$ est alors orthonormale si et seulement si $(e'_j|e'_k) = \delta_{j,k}$ pour tout couple $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$, i.e. si et seulement si $\forall (j,k) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,k} = \delta_{j,k}$, et on a vu que cette relation caractérisait l'orthogonalité de la matrice A.*

On retiendra essentiellement le résultat suivant:

Dans un espace euclidien, la matrice de passage d'une base orthonormale à une autre base orthonormale est une matrice orthogonale.

Les matrices orthogonales sont enfin utilisées pour représenter les isométries vectorielles dans un espace euclidien, rapporté à une base orthonormale. Plus précisément, on a:

<u>Proposition.</u> Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E. Il y a alors équivalence entre les assertions suivantes:

(i): u est une isométrie vectorielle ;

(ii): dans toute BON de E, u est représenté par une matrice orthogonale ;

(iii): il existe une BON de E dans laquelle u est représenté par une matrice orthogonale.

Preuve.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): *si u est une isométrie de E et si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une BON de E, on sait que la famille image $u(\mathcal{B}) = \big(u(e_1), \cdots, u(e_n)\big)$ est une BON de E. La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ représentant u dans la base $\mathcal{B}$ étant aussi la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $u(\mathcal{B})$, elle est orthogonale d'après la proposition précédente.*

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): *évident!*

(iii) $\Longrightarrow$ (i): *Supposons qu'il existe une BON $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E dans laquelle u est représenté par une matrice orthogonale $A = (a_{i,j})$. On a alors $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$ pour tout j, donc ($\mathcal{B}$ étant une BON), $\big(u(e_j)|u(e_k)\big) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,k} = \delta_{j,k}$ d'après une des caractérisations des matrices orthogonales. La base orthonormale $\mathcal{B}$ est donc transformée en une base orthonormale, on en déduit que u est une isométrie.*

<u>Remarque.</u> Il résulte de cela que, si u est une isométrie d'un espace euclidien E, alors $\det(u) \in \{-1, 1\}$. Les isométries de déterminant $+1$ sont qualifiées de "**directes**" et constituent un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$, appelé **groupe spécial orthogonal** de E et noté $\mathrm{SO}(E)$. Celles de déterminant -1 sont dites "**indirectes**".

<u>Exemple.</u> Les réflexions sont des isométries indirectes. *En effet, si H est un hyperplan de E euclidien, si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n)$ est une base orthonormale de E adaptée à la décomposition $E = H \oplus H^{\perp}$, la réflexion d'hyperplan H est représentée dans la base $\mathcal{B}$ par la matrice $D = \mathrm{diag}(1, \cdots, 1, -1)$, de déterminant -1.*

<u>Remarque.</u> Si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1, 1\}$. Mais A peut avoir des valeurs propres complexes, qui sont alors de module 1, le lecteur est invité à le démontrer.

Retour sur le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. **Si $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ est une famille libre finie de vecteurs d'un espace préhilbertien E, il existe une unique famille $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ de même cardinal telle que:**

(C1): la famille $\mathcal{E}$ est orthonormale ;

(C2): pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k) = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_k)$;

(C3): pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(e_k | x_k) > 0$.

Preuve. L'existence a été démontrée dans le chapitre précédent et un procédé algorithmique de construction a été décrit. Montrons maintenant l'unicité d'une telle famille $\mathcal{E}$. Supposons que deux telles familles existent, notées respectivement $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{E}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$. Alors $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux bases orthonormales de l'espace euclidien $V = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$. Notons $P = P_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = (p_{i,j})$ la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$. Cette matrice P est alors orthogonale puisque les deux bases sont orthonormales. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, le vecteur e'_j appartient à $\mathrm{Vect}(e'_1, \cdots, e'_j)$ qui est aussi $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_j)$, les coordonnées de e'_j dans la base $\mathcal{E}$, qui sont aussi les coefficients de la j-ième colonne de la matrice P, sont donc nulles à partir du rang $j+1$, ce qui signifie que la matrice de passage P est triangulaire supérieure. Or, une matrice qui est à la fois orthogonale et triangulaire supérieure est nécessairement diagonale avec des coefficients diagonaux qui valent $+1$ ou -1 (exercice laissé au lecteur). Donc $P = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, ce qui signifie que $e'_k = \varepsilon_k e_k$ pour tout k avec $\varepsilon_k = \pm 1$. Si, pour un k donné, on avait $\varepsilon_k = -1$, alors les produits scalaires $(e_k | x_k)$ et $(e'_k | x_k)$ seraient opposés donc ne pourraient être tous deux strictement positifs. On a donc $\varepsilon_k = +1$ pour tout k, soit $P = I_n$, donc $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$.

III. Endomorphismes autoadjoints. Théorème spectral.

1. Endomorphismes autoadjoints.

Définitions. Soit E un espace euclidien, soit u un endomorphisme de E. On dit que u est **autoadjoint** (ou **symétrique**) si on a

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \big(u(x)|y\big) = \big(x|u(y)\big) \ .$$

On dit que u est **antisymétrique** si on a

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \big(u(x)|y\big) = -\big(x|u(y)\big) \ .$$

ATTENTION! On prendra garde de ne pas confondre la notion d'endomorphisme symétrique avec celle de "symétrie" (endomorphisme s tel que $s \circ s = \mathrm{id}_E$). C'est pourquoi on préférera le terme d'endomorphisme autoadjoint.

Exemple 1. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire tel que $(P|Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Soit l'endomorphisme Φ de E défini par

$$\forall P \in E \qquad \Phi(P) = P'' - 2X\,P' \ .$$

Alors Φ est un endomorphisme autoadjoint de E (*preuve laissée au lecteur*).

Exemple 2. Si E est un espace euclidien orienté de dimension 3, si a est un vecteur de E, alors l'endomorphisme f de E défini par $\forall x \in E \quad f(x) = a \wedge x$, est antisymétrique. *En effet, si $x \in E$ et $y \in E$, on a*

$$\begin{aligned}\big(f(x)|y\big) &= (a\wedge x|y) = [a,x,y] = -[a,y,x]\\ &= -(a\wedge y|x) = -(x|a\wedge y) = -\big(x|f(y)\big)\ .\end{aligned}$$

Proposition. **Dans un espace euclidien E, un projecteur est un projecteur orthogonal si et seulement s'il est autoadjoint.**

Preuve. • *Soit F un s.e.v. de E, soit p_F le projecteur orthogonal sur F. Si x et y sont deux vecteurs de E se décomposant respectivement en $x = x' + x''$ et $y = y' + y''$ suivant la somme directe $E = F \oplus F^\perp$, alors $p_F(x) = x'$, $p_F(y) = y'$, et*

$$\big(p_F(x)|y\big) = (x'|y' + y'') = (x'|y') = (x' + x''|y') = \big(x|p_F(y)\big)\ .$$

Donc l'endomorphisme p_F est autoadjoint.

• *Réciproquement, soit p un projecteur, si p est le projecteur sur F parallèlement à G avec $F \oplus G = E$, si de plus p est autoadjoint, alors en prenant $x \in F$ et $y \in G$, on a $p(x) = x$, $p(y) = 0_E$, donc*

$$(x|y) = \big(p(x)|y\big) = \big(x|p(y)\big) = (x|0_E) = 0\ .$$

Les sous-espaces F et G sont donc orthogonaux, i.e. $G \subset F^\perp$, mais G et $F^\perp$ sont tous deux des supplémentaires de F donc ont la même dimension, finalement $G = F^\perp$, et p est le projecteur orthogonal sur F.

Passons en revue quelques propriétés élémentaires des endomorphismes symétriques et antisymétriques.

Proposition 1. **Si u est un endomorphisme autoadjoint de E euclidien, alors les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.**

Preuve. Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de u, soit $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$. On a alors $u(x) = \lambda x$, $u(y) = \mu y$, puis

$$\begin{aligned}\big(u(x)|y\big) &= (\lambda x|y) = \lambda\,(x|y)\\ &= \big(x|u(y)\big) = (x|\mu y) = \mu(x|y)\ .\end{aligned}$$

L'égalité $\lambda\,(x|y) = \mu(x|y)$ avec $\lambda \neq \mu$ entraîne l'orthogonalité des vecteurs x et y, ce qu'il fallait prouver.

Proposition 2. **Si u est un endomorphisme autoadjoint de E euclidien, si F est un s.e.v. de E stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u.**

Preuve. Soit $x \in F^\perp$, soit $y \in F$. Alors $\big(u(x)|y\big) = \big(x|u(y)\big) = 0$ car $u(y) \in F$. On a donc prouvé que $u(x) \in F^\perp$.
Notons que cela reste vrai pour un endomorphisme u antisymétrique.

Proposition 3 et notation. **L'ensemble des endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, on le note $\mathcal{S}(E)$.**

Vérification immédiate.

Proposition 4 (HP). **Soit u est un endomorphisme antisymétrique de E euclidien, alors sa seule valeur propre possible est 0.**

Preuve. Soit λ une valeur propre de u, soit $x \in E$ un vecteur propre associé, alors $u(x) = \lambda x$. Mais, $\lambda\|x\|^2 = (\lambda x|x) = \big(u(x)|x\big) = -\big(x|u(x)\big) = -(x|\lambda x) = -\lambda\|x\|^2$, donc $\lambda\|x\|^2 = 0$ et, comme x n'est pas le vecteur nul, $\lambda = 0$.

2. <u>Matrices symétriques réelles.</u>

<u>Quelques rappels.</u> Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **symétrique** lorsque $A^\top = A$, i.e. lorsque $a_{j,i} = a_{i,j}$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

Elle est dite **antisymétrique** lorsque $A^\top = -A$, i.e. lorsque $a_{j,i} = -a_{i,j}$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ (ce qui entraîne au passage que ses coefficients diagonaux sont nuls).

L'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques d'ordre n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$. L'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques d'ordre n est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Les deux sous-espaces mentionnés ci-dessus sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,.$$

Cela signifie concrètement que, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut la décomposer de façon unique en $M = S + A$ avec S symétrique et A antisymétrique. Cette décomposition est donnée par $S = \dfrac{1}{2}(M + M^\top)$ (partie symétrique de M), $A = \dfrac{1}{2}(M - M^\top)$ (partie antisymétrique de M).

Bien évidemment, ces matrices ont des liens avec les endomorphismes du même nom. Plus précisément,

<u>Proposition.</u> Soit E un espace euclidien, soit u un endomorphisme de E, soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Alors l'endomorphisme u est autoadjoint (ou symétrique) si et seulement si la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique. On peut bien sûr remplacer "symétrique" par "antisymétrique".

Preuve. Posons $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A = (a_{i,j})$, on sait que $a_{i,j} = \big(e_i|u(e_j)\big)$ pour tout couple (i,j).

• Si l'endomorphisme u est symétrique (i.e. autoadjoint), alors en particulier

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad \big(e_i|u(e_j)\big) = \big(u(e_i)|e_j\big) = \big(e_j|u(e_i)\big) \,,$$

donc $a_{i,j} = a_{j,i}$ et la matrice A est symétrique.

• Supposons A symétrique, i.e. $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout couple (i,j), i.e. $\big(e_i|u(e_j)\big) = \big(e_j|u(e_i)\big)$ pour tout (i,j). Si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ sont deux vecteurs de E, on a alors

$$\begin{aligned}
\big(u(x)|y\big) &= \Big(\sum_{i=1}^n x_i u(e_i) \mid \sum_{j=1}^n y_j e_j\Big) = \sum_{i,j} x_i y_j \,\big(u(e_i)|e_j\big) \\
&= \sum_{i,j} x_i y_j \,\big(e_i|u(e_j)\big) = \Big(\sum_{i=1}^n x_i e_i \mid \sum_{j=1}^n y_j u(e_j)\Big) \\
&= \big(x|u(y)\big) \,,
\end{aligned}$$

donc l'endomorphisme u est symétrique (i.e. autoadjoint). Preuve analogue pour antisymétrique.

3. Le théorème spectral.

Théorème spectral, version 1. Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres.

Une preuve est donnée dans le paragraphe suivant.

Commentaire. Autrement dit, si $u \in \mathcal{S}(E)$ avec E euclidien, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle u est représenté par une matrice diagonale.

En conséquence, un tel endomorphisme u est diagonalisable, donc E est la somme (toujours directe) des sous-espaces propres de u et, de plus, les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux (*c'est une conséquence de cette version 1 du théorème spectral, mais aussi plus simplement de la "proposition 1" du paragraphe* **III.1.** *ci-dessus*). On peut donc énoncer:

Théorème spectral, version 2. Si u est un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E, alors E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u:

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} E_\lambda(u) \,.$$

En voici une troisième et dernière, qui est la forme matricielle:

Théorème spectral, version 3. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle, il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Preuve. En effet, notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A. Si $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique, la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ étant orthonormale, cet endomorphisme est alors autoadjoint, on peut donc lui appliquer la version 1 du théorème spectral. Soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de f, soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = A$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Les formules de changement de base donnent la relation $A = PDP^{-1}$, où $P = P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}}$ est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base orthonormale $\mathcal{B}$ de vecteurs propres. Cette matrice de passage P est orthogonale car les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}$ sont toutes deux orthonormales.

Commentaire. La matrice de passage P de l'énoncé précédent étant orthogonale, la relation $A = PDP^{-1}$ peut aussi s'écrire $A = PDP^\top$.

Commentaire. On énonce souvent le résultat en disant que **toute matrice symétrique réelle est diagonalisable, à l'aide d'une matrice de passage orthogonale.**

Attention! Une matrice symétrique complexe n'est pas toujours diagonalisable. Par exemple, la matrice symétrique $S = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ admet 0 comme valeur propre double, et n'est pas la matrice nulle, elle n'est donc pas diagonalisable.

4. Une preuve du théorème spectral.

Commençons par énoncer et prouver un lemme utile:

Lemme. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors A admet au moins une valeur propre réelle, i.e. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$, et de plus toutes les valeurs propres de A sont réelles, i.e. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{R}$.

Preuve. Déjà, A admet au moins une valeur propre complexe, c'est une conséquence du théorème de d'Alembert-Gauss puisque son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$.

De plus, si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre complexe de A, il existe $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$. En conjuguant cette relation, comme la matrice A est réelle ($\overline{A} = A$), il vient $A\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,\overline{X}$, puis $X^\top A\,\overline{X} = X^\top\,\overline{\lambda}\,\overline{X}$, i.e. puisque A est symétrique, $(AX)^\top\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,X^\top\,\overline{X}$, soit $(\lambda X)^\top\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,X^\top\,\overline{X}$, donc $\lambda\,X^\top\,\overline{X} = \overline{\lambda}\,X^\top\,\overline{X}$. Or, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a $X^\top\,\overline{X} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\overline{x_k} = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 > 0$ puisque X n'est pas le vecteur nul de $\mathbb{C}^n$. On déduit donc que $\lambda = \overline{\lambda}$, i.e. $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Commentaire.</u> Dans cette preuve, on a utilisé la notation $\overline{A}$ pour le conjugué d'une matrice A (quel que soit son format), i.e. si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, on pose $\overline{A} = (\overline{a_{i,j}}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Des propriétés de la conjugaison des nombres complexes (le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, le conjugué d'un produit est le produit des conjugués), on déduit facilement que, si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{C})$, alors $\overline{AB} = \overline{A}\;\overline{B}$, ce qui justifie les calculs ci-dessus.

Prouvons maintenant le théorème spectral (version 1) lui-même.

Preuve. On procède par récurrence sur $n = \dim(E)$.

Pour $n = 1$, c'est évident.

Soit $n \geq 2$, supposons la propriété vraie au rang $n-1$ (i.e. tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien de dimension $n-1$ admet une base orthonormale de vecteurs propres). Soit alors E un espace euclidien de dimension n, et $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint. D'après le lemme ci-dessus, u admet au moins une valeur propre, il existe donc un vecteur propre associé e_1, que l'on peut toujours choisir unitaire quitte à le diviser par sa norme. La droite $D = \mathrm{Vect}(e_1)$ est stable par u, donc l'hyperplan $H = D^\perp$ est aussi stable par u (proposition 2 du paragraphe 1 ci-dessus). Or, l'endomorphisme u_H de H induit par u est autoadjoint dans l'espace euclidien H de dimension $n-1$, donc (hypothèse de récurrence) il existe une base orthonormale $(e_2, \cdots, e_n)$ de H constituée de vecteurs propres de u_H (donc de u), et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est alors une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de u.

5. <u>Caractères positif, défini positif.</u>

<u>Définitions.</u> Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E.

On dit que u est **positif** si on a

$$\forall x \in E \qquad \big(u(x)|x\big) \geq 0\ .$$

On dit que u est **défini positif** si on a

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\} \qquad \big(u(x)|x\big) > 0\ .$$

<u>Commentaire.</u> Il est clair que "défini positif" entraîne "positif".

<u>Commentaire.</u> Le lien est immédiat avec le vocabulaire analogue utilisé pour les formes bilinéaires symétriques, notamment en vue de définir la notion de produit scalaire. En effet, si $u \in \mathcal{S}(E)$, l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y)\in E^2 \qquad \varphi(x,y)=\big(u(x)|y\big)$$

est clairement une forme bilinéaire symétrique sur E. Le caractère positif de l'endomorphisme autoadjoint u traduit le fait que cette forme est positive, i.e. $\forall x\in E \quad \varphi(x,x)\geq 0$.

Le caractère défini positif de l'endomorphisme autoadjoint u traduit le fait que cette forme est définie positive, autrement dit que φ est un produit scalaire sur E. Ce dernier résultat pouvant s'avérer utile pour traiter des exercices, je le réécris sou forme de "proposition":

Proposition. Soit u un endomorphisme autoadjoint défini positif d'un espace euclidien E. Alors l'application $\varphi : E\times E\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y)=\big(u(x)|y\big)$ est un produit scalaire sur E.

Notations. L'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs d'un espace euclidien E est noté $\mathcal{S}^+(E)$, celui des endomorphismes autoadjoints définis positifs est noté $\mathcal{S}^{++}(E)$.

Attention! Ces ensembles ne sont évidemment pas des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{S}(E)$.

Caractérisation spectrale. Un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E est positif si et seulement si ses valeurs propres sont toutes positives ou nulles, il est défini positif si et seulement si ses valeurs propres sont toutes strictement positives. Autrement dit, si $u\in\mathcal{S}(E)$, on a les équivalences:

$$u\in\mathcal{S}^+(E) \iff \mathrm{Sp}(u)\subset\mathbb{R}_+\ ;$$
$$u\in\mathcal{S}^{++}(E) \iff \mathrm{Sp}(u)\subset\mathbb{R}_+^*\ .$$

Preuve. • *Le sens direct est facile: soit $u\in\mathcal{S}^+(E)$, soit $\lambda\in\mathbb{R}$ une valeur propre de u, il existe alors $x\in E$, non nul, tel que $u(x)=\lambda x$. Par hypothèse, on a $\big(u(x)|x\big)\geq 0$, soit $(\lambda x|x)\geq 0$, soit $\lambda\,\|x\|^2\geq 0$ et, comme x est non nul, on déduit $\lambda\geq 0$. Donc $\mathrm{Sp}(u)\subset\mathbb{R}_+$. On obtient de même que, pour $u\in\mathcal{S}^{++}(E)$, on a $\mathrm{Sp}(u)\subset\mathbb{R}_+^*$.*

• *Réciproquement, soit $u\in\mathcal{S}(E)$ tel que $\mathrm{Sp}(u)\subset\mathbb{R}_+$. Notons $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ les valeurs propres de u, avec $n=\dim(E)$, les λ_i ne sont donc pas nécessairement distincts mais sont tous positifs ou nuls. On sait qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de u, et on peut la construire de façon que chaque e_i soit vecteur propre associé à la valeur propre λ_i, $1\leq i\leq n$. Soit $x\in E$, on le décompose dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$, on a alors $u(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i\,u(e_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_ie_i$, puis*

$$\big(u(x)|x\big)=\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_ie_i\ \Big|\ \sum_{j=1}^{n}x_je_j\Big)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i^2\geq 0\ .$$

L'endomorphisme autoadjoint u est donc positif.
On montre de même que $\mathrm{Sp}(u)\subset\mathbb{R}_+^*$ entraîne $u\in\mathcal{S}^{++}(E)$.

Intermède. Si $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ sont deux matrices-colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors l'expression $X^\top AY$ est un réel, et on a

$$X^\top AY = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i y_j \ .$$

Définitions. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

On dit que A est **positive** si on a

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad X^\top AX \geq 0 \ .$$

On dit que A est **définie positive** si on a

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} \qquad X^\top AX > 0 \ .$$

Commentaire. C'est bien sûr la traduction matricielle de ce qui précède. En effet, une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ représente canoniquement un endomorphisme u_A de $\mathbb{R}^n$, qui est autoadjoint pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. La matrice A est alors positive *si et seulement si* l'endomorphisme u_A est positif, elle est définie positive *si et seulement si* l'endomorphisme u_A est défini positif.

Notations. L'ensemble des matrices symétriques positives (réelles, carrées d'ordre n) est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, celui des matrices symétriques définies positives est noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Ces ensembles ne sont évidemment pas des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Comme pour les endomorphismes autoadjoints, on a la

Caractérisation spectrale. Une matrice symétrique réelle est positive si et seulement si ses valeurs propres sont toutes positives ou nulles, elle est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont toutes strictement positives. Autrement dit, si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a les équivalences:

$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+ \ ;$$
$$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^* \ .$$

Un approfondissement utile. Si u est un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E, si α est la plus petite valeur propre de u et β sa plus grande valeur propre, alors on a l'encadrement

$$\forall x \in E \qquad \alpha\, \|x\|^2 \leq \big(u(x)|x\big) \leq \beta\, \|x\|^2 \ .$$

En effet, l'endomorphisme $v = u - \alpha\,\mathrm{id}_E$ est autoajoint, et ses valeurs propres sont positives puisque $\mathrm{Sp}(v) = \big\{\lambda - \alpha \ ; \ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\big\}$*, donc par la caractérisation spectrale on déduit que $v \in \mathcal{S}^+(E)$, donc*

$$\forall x \in E \qquad \big(v(x)|x\big) = \big(u(x) - \alpha\, x \mid x\big) = \big(u(x)|x\big) - \alpha\, \|x\|^2 \geq 0 \ ,$$

soit $\big(u(x)|x\big) \geq \alpha\, \|x\|^2$*. On obtient de même l'autre inégalité en considérant $w = \beta\,\mathrm{id}_E - u$.*
Voici une traduction matricielle: soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, soient α et β sa plus petite et sa plus grande valeurs propres, alors

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \alpha\, X^\top X \leq X^\top SX \leq \beta\, X^\top X \ .$$

Cas de la dimension deux. Le lecteur vérifiera rapidement que, si λ et μ sont deux réels, alors on a les équivalences

$$\begin{cases} \lambda > 0 \\ \mu > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu > 0 \\ \lambda\mu > 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \lambda \geq 0 \\ \mu \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu \geq 0 \\ \lambda\mu \geq 0 \end{cases} .$$

La trace et le déterminant étant des invariants de similitude, on en déduit facilement que, si $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, alors

$$S \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} \operatorname{tr}(S) > 0 \\ \det(S) > 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad S \in \mathcal{S}_2^{+}(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} \operatorname{tr}(S) \geq 0 \\ \det(S) \geq 0 \end{cases} .$$