Endomorphismes des espaces euclidiens

Isométries vectorielles et matrices orthogonales, groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$ ou $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Les isométries en dimensions 2 *et* 3 *n'ont pas encore été étudiées.*

Endomorphismes autoadjoints (ou symétriques) d'un espace euclidien. Définition, propriétés élémentaires, espace vectoriel $\mathcal{S}(E)$. Représentation par une matrice symétrique dans une base orthonormale.

Théorème spectral:

- Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E est diagonalisable dans une base orthonormale (il existe une b.o.n. de vecteurs propres, ou encore E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres) ;
- Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale.

Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs. Caractérisation par le spectre.

Matrices symétriques positives, définies positives. Caractérisation par le spectre.

Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$, $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Probabilités

Familles sommables (indexées par un ensemble I au plus dénombrable) d'éléments de $[0,+\infty]$ (alias "le monde des bisounours": on peut sommer par paquets, intervertir des sommations, majorer sans se poser de questions, la famille est dite sommable si $\sum_{i\in I} x_i < +\infty$).

Aucune démonstration, aucun exercice spécifiquement sur les familles sommables ne doit être proposé, il ne s'agit que d'un outil à utiliser dans le contexte des démonstrations de cours et des résolutions d'exercices de probabilités.

Notion de tribu sur un univers Ω, espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{A})$. Notion de probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$, espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Propriétés de continuité monotone, de sous-additivité.

Événements presque sûrs, événements négligeables, systèmes quasi-complets d'événements.

Probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes. Événements indépendants (familles finies).

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Dans E euclidien, expression de la réflexion d'hyperplan $H = \big(\mathrm{Vect}(a)\big)^{\perp}$, expression de la distance d'un vecteur x à cet hyperplan.
- Un projecteur est autoadjoint si et seulement si c'est un projecteur orthogonal.
- Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs. Caractérisation par le spectre.
- Encadrement de $\big(u(x)|x\big)$ pour $x \in E$, avec $u \in \mathcal{S}(E)$ tel que $\mathrm{Sp}(u) \subset [\alpha,\beta]$.
- Existence d'une racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive (unicité non exigible).
- Propriété de sous-additivité d'une probabilité.