Notion de probabilité. Espaces probabilisés.

1. Deux archers tirent chacun leur tour sur une cible. Le premier qui touche a gagné. Le joueur qui commence a la probabilité p_1 de toucher à chaque tour et le second la probabilité p_2 (avec $p_1,\, p_2 \in]0,1[$).

a. Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?

b. Montrer qu'il est presque sûr que le jeu se termine.

2. Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur, puis on répète l'opération.

a. Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges ?

b. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?

c. Le résultat précédent reste-t-il vrai si on remet la boule accompagnée de trois autres boules de la même couleur ?

3. On suppose que la probabilité p_n pour qu'un couple ait exactement n enfants est de la forme $p_n = \alpha\, q^n$ pour n entier naturel non nul, où α est un réel strictement positif et $q \in]0,1[$.

a. Que vaut p_0 ? Quelle condition doit-on imposer à α et q?

b. Soit k un entier naturel. En utilisant le cours sur les séries entières, calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$, où x est un réel tel que $|x| < 1$.

c. Sachant qu'à chaque naissance, la probabilité qu'il s'agisse d'une fille ou d'un garçon est la même, quelle est la probabilité pour qu'un couple admette exactement k filles ? *On traitera à part le cas $k = 0$.*

4. Soit (A_n) une suite d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose $\displaystyle S = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \Big(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \Big)$.

a. Montrer que S est un événement, i.e. $S \in \mathcal{A}$, et qu'il est réalisé si et seulement si une infinité des événements A_n sont réalisés.

b. Dans cette question et la suivante, on considère une suite infinie de lancers indépendants d'une pièce, la probabilité d'obtenir "Pile" à chaque lancer étant $p \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'événement A_n : "au cours des $2n$ premiers lancers, on obtient autant de Pile que de Face". Calculer $P(A_n)$ pour tout n.

c. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $\displaystyle\binom{2n}{n} \leq 4^n$. En déduire que, si $p \neq \frac{1}{2}$, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ converge. Montrer alors que $P(S) = 0$.

5*. Soit (A_n) une suite d'événements indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des événements A_n ne soit réalisé est majorée par $\displaystyle M = \exp\Big(-\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \Big)$.

On pourra utiliser l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - x \leq e^{-x}$.

Variables aléatoires discrètes.

6. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X = n) = k\, P(X \geq n)\ .$$

Déterminer la loi de X.

7. Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent des lois géométriques $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$ respectivement. Calculer $P(X < Y)$.

8. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ respectivement. Soit n un entier naturel. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{X + Y = n\}$.

9. À la gare de péage d'une autoroute, le nombre de voitures circulant dans le sens Nord-Sud suit une loi de Poisson de paramètre a, et le nombre de voitures circulant dans le sens Sud-Nord suit une loi de Poisson de paramètre b. Soient n et k deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$. Sachant qu'à un instant donné, n voitures attendent au péage, quelle est la probabilité pour que k parmi elles circulent dans le sens Nord-Sud ?

10. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et toutes deux suivant une loi géométrique de même paramètre $p \in]0,1[$. Pour $\omega \in \Omega$, on définit la matrice $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité pour que cette matrice $M(\omega)$ soit inversible.

11. Soit r un entier supérieur ou égal à 2, soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note

$$X_r = X\,(X-1)\,\cdots\,(X-r+1) = \prod_{k=0}^{r-1}(X-k)\ .$$

a. Calculer l'espérance de X_r lorsque X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

b. Calculer $\mathrm{E}(X_r)$ lorsque X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

12. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$. On considère N variables aléatoires $X_1, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leq i \leq N} X_i$, c'est-à-dire

$$\forall \omega \in \Omega \qquad Y(\omega) = \min\big\{X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega)\big\}\ .$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(Y > n)$. Reconnaître la loi de Y, en déduire $\mathrm{E}(Y)$.

13. Chez un marchand de journaux, on peut acheter des pochettes contenant chacune une image. La collection complète comporte N images distinctes, dont l'obtention à chaque achat est équiprobable. On note X_k le nombre d'achats nécessaires pour avoir obtenu au moins k images différentes. Ainsi, $X_1 = 1$ et X_N est le nombre d'achats nécessaires à l'obtention de la collection complète.

a. Quelle est la loi de la variable $X_{k+1} - X_k$, avec $k \in [\![1, N-1]\!]$?

b. En déduire l'espérance de X_N.

14. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, suivant toutes la même loi de Poisson de paramètre a. Soit Y_n la variable aléatoire telle que $Y_n(\omega) = 1$ si $X_n(\omega) = 0$, et $Y_n(\omega) = 0$ sinon. Soit enfin $Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

a. Montrer que $\mathrm{V}(Z_n) \leq \dfrac{1}{4n}$.

b. À partir de quelle valeur de n peut-on affirmer qu'il y a 90% de chance au moins pour que $|Z_n - e^{-a}|$ soit inférieur à $\dfrac{1}{10}$?

15. On modélise une partie de pile ou face infinie par l'univers $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des suites infinies de 0 et de 1 (par exemple, "Pile" est codé par 0, "Face" est codé par 1). On suppose qu'à chaque lancer, l'apparition de "Face"=1 a une probabilité $p \in]0,1[$, et que les lancers sont indépendants. On admet l'existence d'une tribu sur Ω et d'une probabilité P telle que, si on note $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de Ω, on ait $P(\omega_n = 1) = p$ pour tout n. Les lancers étant supposés indépendants, si on se donne des entiers naturels **distincts** $n_1, \cdots, n_k, m_1, \cdots, m_l$, on a alors

$$P\big(\omega_{n_1} = 1, \cdots, \omega_{n_k} = 1, \omega_{m_1} = 0, \cdots, \omega_{m_l} = 0\big) = p^k(1-p)^l\ .$$

Toute suite $\omega \in \Omega$ se compose d'une succession de blocs formés de 0 et de blocs formés de 1. On note $X(\omega)$ la longueur du premier bloc de la suite ω, et $Y(\omega)$ la longueur du deuxième bloc. Ainsi, pour $\omega = (1,1,1,0,0,1,1,0,1,...)$, on a $X(\omega) = 3$ et $Y(\omega) = 2$.

a. Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y. Ont-elles la même loi ?

b. Déterminer la loi conjointe du couple $U = (X,Y)$. Dans quel cas les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

c. Calculer les espérances des variables X et Y.

d. Étudier les variations de $\mathrm{E}(X)$ en fonction de p. Comment choisir p pour avoir $\mathrm{E}(X) = \dfrac{5}{2}$?

16. Un péage autoroutier comporte deux barrières. Le nombre de voitures arrivant à ce péage par jour suit une loi de Poisson de paramètre λ, et chaque voiture choisit arbitrairement de franchir l'une ou l'autre des deux barrières, ces choix étant indépendants. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires représentant le nombre de voitures franchissant chacune des deux barrières dans une journée.

a. Déterminer la loi de X_1.

b. En exploitant $X_1 + X_2$, calculer la covariance de X_1 et X_2.

c. Montrer que les variables X_1 et X_2 sont indépendantes.

17. Un joueur dispose de N dés équilibrés. Il lance une première fois ceux-ci et on note X_1 le nombre de "six" obtenus. Il met de côté les dés correspondants et relance les autres dés (s'il en reste). On note X_2 le nombre de "six" obtenus et on répète l'expérience définissant ainsi une suite de variables aléatoires $X_1,\ X_2,\ \cdots$ La variable $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ correspond alors au nombre de "six" obtenus après n lancers.

a. Vérifier que S_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

b. Montrer qu'il est presque sûr qu'il existe un rang n pour lequel $S_n = N$.

c. On définit alors la variable aléatoire

$$T = \min\Big(\{n \geq 1 | S_n = N\} \ \cup\ \{+\infty\}\Big)\ .$$

Déterminer la loi de T.

d. Vérifier que la variable T est d'espérance finie, et donner une formule exprimant celle-ci. Calculer cette espérance pour $N = 1$ et $N = 2$.

18. Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(T > n) > 0$. On appelle **taux de panne** associé à T la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\theta_n = P(T = n \mid T \geq n)\ .$$

Typiquement, si T est la variable aléatoire indiquant l'instant où un matériel tombe en panne, la quantité θ_n indique la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant n sachant qu'il était encore fonctionnel jusque là.

a. Montrer que $\theta_n \in [0, 1[$ pour tout n.

b. Exprimer $P(T \geq n)$ à l'aide des θ_k. En déduire que la série $\sum \theta_k$ diverge.

c*. Inversement, soit (θ_n) une suite d'éléments de $[0, 1[$ telle que la série $\sum \theta_n$ diverge. Montrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un taux de panne associé à une certaine variable aléatoire T.

19. Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $Y \leq X$ et que $\mathrm{E}(X) < +\infty$. On suppose de plus que, pour tout $x \in \mathbb{N}$, la loi de Y conditionnellement à l'événement $\{X = x\}$ est la loi uniforme sur $[\![0, x]\!]$.

a. Donner une relation simple entre $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{E}(Y)$.

b. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X = n) = (n + 1)\,\big(P(Y = n) - P(Y = n + 1)\big)\ .$$

c. Montrer que les variables $X - Y$ et Y ont la même loi.

20. Soient $X_1,\ \cdots,\ X_n$ des variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre deux, i.e. telles que $X_1^2,\ \cdots,\ X_n^2$ soient d'espérance finie. On appelle **matrice des covariances** de la famille $(X_1, \cdots, X_n)$ la matrice carrée d'ordre n:

$$S = \big(\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\big)_{1\leq i,j\leq n}\ .$$

Soient $a_1,\ \cdots,\ a_n$ des réels. Exprimer la variance de $X = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ à l'aide de la matrice S. En déduire que la matrice symétrique S est positive.

Fonctions génératrices.

21. On dispose d'un premier dé normal (non pipé, faces numérotées de 1 à 6), et d'un deuxième dé (non pipé) dont les faces ne portent aucune inscription. On note X la variable aléatoire correspondant au résultat du lancer du dé normal. En utilisant des fonctions génératrices, déterminer de quelle façon il est possible de numéroter les faces du deuxième dé afin que, lors du lancer simultané de ces deux dés, la somme des deux nombres obtenus prenne toutes les valeurs de 1 à 12 avec équiprobabilité.

22. On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux "Pile" consécutifs. Par exemple, pour la suite de lancers PFFPFPPFFF..., on a $X = 7$. De même, on note Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir "Face" immédiatement suivi de "Pile". Dans l'exemple ci-dessus, on a donc $Y = 4$. On pose enfin $x_n = P(X = n)$ et $y_n = P(Y = n)$ pour tout n entier naturel non nul.

a. Prouver la relation $\forall n \geq 3 \quad x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{4}x_{n-2}$.

b. En déduire la fonction génératrice de la variable aléatoire X. Calculer $\mathrm{E}(X)$.

c. Avec des méthodes analogues, calculer l'espérance de la variable Y. *Ici, on pourra aussi expliciter y_n qui a une expression plus simple que x_n.*

23. On répète indéfiniment le lancer d'une pièce équilibrée et on note la suite des résultats obtenus. On appelle **série** toute séquence de résultats identiques consécutifs. Par exemple, si les huit premiers lancers donnent, dans l'ordre: PPFFFPFF, on aura obtenu quatre séries, à savoir 'PP', 'FFF', 'P' et 'FF'. Pour tout n entier naturel non nul, on note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de séries obtenues lors des n premiers lancers. Dans l'exemple précédent, $X_1 = X_2 = 1$, $X_3 = X_4 = X_5 = 2$, $X_6 = 3$, $X_7 = X_8 = 4$, $\cdots$

a. Pour $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n$, prouver la relation

$$P(X_n = k) = \frac{1}{2}\Big(P(X_{n-1} = k) + P(X_{n-1} = k-1)\Big).$$

b. En déduire, par récurrence, la fonction génératrice G_n de la variable X_n.

c. En déduire que la variable $Y_n = X_n - 1$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

24. On répète une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $q = 1 - p$ d'échouer, définissant ainsi une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(X_n)_{n\geq 1}$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note S_m la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de m succès: $S_m = k \iff \big(X_1 + \cdots + X_k = m \quad \text{et} \quad X_1 + \cdots + X_{k-1} < m\big)$.

a. Déterminer la loi et la fonction génératrice de S_1.

b. Même question avec $S_m - S_{m-1}$, pour $m \geq 2$.

c. En déduire la fonction génératrice, puis la loi, de S_m.

25.a. Trouver la constante k et une condition sur le réel a pour que la suite $\left(\left(\dfrac{a}{a+1}\right)^n k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une distribution de probabilités sur l'ensemble $\mathbb{N}$.

b. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et ayant toutes la loi définie par la distribution de probabilités ci-dessus. Déterminer la fonction génératrice de la variable $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

c. Calculer de deux manières l'espérance et la variance de S_n.

26. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit sa **fonction caractéristique** Φ_X par $\Phi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX})$ pour tout t réel.

a. Montrer que Φ_X est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale $I_k = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_X(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t$. Que dire de deux variables aléatoires X et Y, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que $\Phi_X = \Phi_Y$?

c. On suppose que X est d'espérance finie. Montrer que la fonction Φ_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\Phi'_X(0)$.

27. On note X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On se donne une suite $(X_i)_{i\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi que X. Soit d'autre part N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, que l'on suppose indépendante des X_i. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$T(\omega) = \prod_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega) .$$

On conviendra que $T(\omega) = 1$ si $N(\omega) = 0$.

On suppose que X est d'espérance finie notée m. En utilisant la fonction génératrice G_N de la variable N, donner une condition nécessaire et suffisante pour que T soit d'espérance finie, et exprimer dans ce cas $\mathrm{E}(T)$. Étudier le cas particulier où N et X sont des variables de Poisson.

Exercices avec Python.

28. Une pièce a la probabilité $p \in]0,1[$ de tomber sur pile. On la lance jusqu'à avoir obtenu deux fois pile, et on note X le nombre de fois où elle est tombée sur “face”.

a. Loi de X. Montrer que X est d'espérance finie et la calculer.

Lorsque $X = n$, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on en tire une au hasard. On note Y le numéro de la boule tirée.

b. Utiliser Python pour simuler cette expérience aléatoire.

c. Loi de Y. Montrer que Y est d'espérance finie et la calculer.