EXERCICES sur les ESPACES PRÉHILBERTIENS et EUCLIDIENS
PSI2 2024-2025

Produit scalaire, norme associée, orthogonalité

1. Soient x et y deux vecteurs d'un espace préhilbertien E. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si

$$\forall\lambda \in \mathbb{R} \qquad \|x + \lambda y\| \geq \|x\| \ .$$

- -

• Si x et y sont orthogonaux, alors x et λy le sont aussi, et la relation de Pythagore donne

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + \|\lambda y\|^2 \geq \|x\|^2 \ ,$$

donc $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout λ réel.

• Si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout λ, en élevant au carré, en développant, puis en simplifiant, on a

$$\forall\lambda \in \mathbb{R} \qquad 2\lambda\,(x|y) + \lambda^2\,\|y\|^2 \geq 0 \ .$$

La fonction $f\,:\,\lambda \mapsto 2\lambda\,(x|y) + \lambda^2\,\|y\|^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et elle admet un minimum (global) en 0, donc $f'(0) = 0$, ce qui donne $2\,(x|y) = 0$.

---

2. Soit E un espace préhilbertien réel. Soient f et g deux applications de E vers E telles que

$$\forall(x, y) \in E^2 \qquad \big(x|f(y)\big) = \big(g(x)|y\big) \ .$$

Montrer que f et g sont des endomorphismes de E.

- -

Soient x_1, x_2, y des vecteurs de E, soient a et b des réels ; alors

$$\begin{aligned}
\big(g(ax_1 + bx_2)|y\big) &= \big(ax_1 + bx_2|f(y)\big) = a\,\big(x_1|f(y)\big) + b\,\big(x_2|f(y)\big) \\
&= a\,\big(g(x_1)|y\big) + b\,\big(g(x_2)|y\big) \\
&= \big(a\,g(x_1) + b\,g(x_2)|y\big) \ .
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout vecteur y de E, on déduit $g(ax_1 + bx_2) = a\,g(x_1) + b\,g(x_2)$, donc g est linéaire. On procède de même pour montrer la linéarité de f.

3*. Soit E un espace préhilbertien, soit $u : E \to E$ une application conservant le produit scalaire, i.e. telle que

$$\forall(x, y) \in E^2 \qquad \big(u(x)|u(y)\big) = (x|y) \ .$$

Montrer que u est un endomorphisme de E.

- -

L'application u vérifie bien sûr $\forall x \in E \quad \big\|u(x)\big\| = \|x\|$ (conservation de la norme).

Il suffit de montrer la linéarité de u. Soient donc $x \in E$, $y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\big\|u(\lambda x + y) - \lambda\,u(x) - u(y)\big\|^2 &= \big\|u(\lambda x + y)\big\|^2 + \lambda^2\,\|u(x)\|^2 + \big\|u(y)\big\|^2 - 2\lambda\,\big(u(\lambda x + y)|u(x)\big) \\
&\qquad -2\,\big(u(\lambda x + y)|u(y)\big) + 2\lambda\,\big(u(x)|u(y)\big) \\
&= \big\|\lambda x + y\big\|^2 + \lambda^2\,\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\lambda\,(\lambda x + y|x) - 2\,(\lambda x + y|y) + 2\lambda\,(x|y) \\
&= \big\|(\lambda x + y) - \lambda x - y\big\|^2 \ = \ 0 \ .
\end{aligned}$$

On en déduit que $u(\lambda x + y) = \lambda\,u(x) + u(y)$, c'est ce qu'il fallait démontrer.

---

4. Soit $E = \mathcal{C}^1\big([0,1], \mathbb{R}\big)$. Pour $f \in E$ et $g \in E$, on pose

$$< f, g >= \int_0^1 f'(t)\, g'(t)\, \mathrm{d}t + f(1)\, g(0) + f(0)\, g(1)\ .$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

- -

La bilinéarité et la symétrie sont évidentes. Pour le caractère défini positif, il faut penser à Mrs. Cauchy & Schwarz, qui nous disent notamment que $\displaystyle\left(\int_0^1 f'(t)\, \mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_0^1 f'(t)^2\, \mathrm{d}t$. Ainsi,

$$\begin{aligned} < f, f > &= \int_0^1 f'(t)^2\, \mathrm{d}t + 2\, f(0)\, f(1) \\ &\geq \left(\int_0^1 f'(t)\, \mathrm{d}t\right)^2 + 2\, f(0)\, f(1) \ = \ \big(f(1) - f(0)\big)^2 + 2\, f(0)\, f(1) \\ &= f(0)^2 + f(1)^2 \ \geq \ 0\ . \end{aligned}$$

La forme est donc positive et, si $< f, f >= 0$, alors $f(0)^2 + f(1)^2 = 0$, donc $f(0) = f(1) = 0$, mais on a aussi dans ce cas $\displaystyle\int_0^1 f'(t)^2 \mathrm{d}t = 0$, d'où $f' = 0$ par le théorème de stricte positivité, puis $f = 0$ d'où le caractère défini.

---

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \|AX\| \leq \|X\|$, où $\|\cdot\|$ représente la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$.

Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \|A^\top X\| \leq \|X\|$.

- -

Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est donné par $(X|Y) = X^\top Y$. Soit alors $X \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|A^\top X\|^2 = (A^\top X | A^\top X) = (A^\top X)^\top (A^\top X) = X^\top A A^\top X = (X | AA^\top X)\ .$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors $\|A^\top X\|^2 \leq \|X\|\, \|AA^\top X\|$ et, par hypothèse, $\|AA^\top X\| \leq \|A^\top X\|$. On obtient donc $\|A^\top X\|^2 \leq \|X\|\, \|A^\top X\|$.

Si $A^\top X \neq 0$, alors $\|A^\top X\| > 0$ et, en simplifiant, on obtient bien $\|A^\top X\| \leq \|X\|$.

Si $A^\top X = 0$, alors l'inégalité demandée est triviale.

---

6. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel constitué des suites réelles bornées. Si u et v sont deux suites appartenant à E, on pose $\displaystyle (u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n v_n}{2^n}$.

a. Montrer que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur E.

b. On note F le sous-espace vectoriel de E constitué des suites "presque nulles", c'est-à-dire dont les termes sont nuls à partir d'un certain rang. Déterminer l'orthogonal de F. Le sous-espace F admet-il un supplémentaire orthogonal ? Déterminer $(F^\perp)^\perp$.

- -

a. D'abord, pour $(u,v) \in E^2$, la série de terme général $\dfrac{u_n v_n}{2^n}$ converge : en effet, les suites u et v sont bornées, donc $|u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq M'$ pour tout n, puis $\left|\dfrac{u_n v_n}{2^n}\right| \leq \dfrac{MM'}{2^n}$, d'où la convergence absolue de la série définissant $(u|v)$. Les vérifications des caractères bilinéaire, symétrique et défini positif, sont laissées à l'éventuel (et bienvenu) lecteur.

b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $e^{(k)} = (e_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $e_n^{(k)} = \delta_{k,n}$, autrement dit la suite dont le terme d'indice k vaut 1, et les autres valent 0. On a bien $e^{(k)} \in F$ pour tout k. *En fait, on a plus précisément* $F = \mathrm{Vect}\left\{e^{(k)}\ ;\ k \in \mathbb{N}\right\}$. Si $u \in F^\perp$, alors, pour tout entier naturel k, on a $(u|e^{(k)}) = \dfrac{u_k}{2^k} = 0$, donc $u = 0$. On a ainsi prouvé que $F^\perp = \{0\}$. Comme $F \neq E$, on a $F \oplus F^\perp = F \oplus \{0\} = F \neq E$, donc l'orthogonal $F^\perp$ de F n'est pas un supplémentaire de F.
Enfin, $(F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E$, et en particulier $(F^\perp)^\perp \neq F$.

Familles orthogonales ou orthonormales

7. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P,Q) \in E^2$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur l'espace vectoriel E.

b. Calculer $(X^p|X^q)$ pour p et q entiers naturels.

c. Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$ pour ce produit scalaire.

- -

a. Tout d'abord, l'intégrale ci-dessus converge: en effet, si le polynôme PQ est non nul, soit $a_d X^d$ son terme dominant avec $d \in \mathbb{N}$ et $a_d \in \mathbb{R}^*$, on a alors

$$t^2\,P(t)\,Q(t)\,e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\sim} a_d\,t^{d+2}\,e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées, donc $P(t)\,Q(t)\,e^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ lorsque $t \to +\infty$, ce qui garantit l'intégrabilité de cette fonction continue sur $[0, +\infty[$.

Ensuite, on a bien un produit scalaire: La bilinéarité et la symétrie sont évidentes, et on a $(P|P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \geq 0$. Comme la fonction $t \mapsto P(t)^2\,e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, on déduit du théorème de stricte positivité que $(P|P)$ est nul si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}_+\quad P(t)^2\,e^{-t} = 0$, ce qui entraîne que $\forall t \in \mathbb{R}_+\quad P(t) = 0$, ce qui entraîne enfin que le polynôme P admet une infinité de racines, donc est le polynôme nul. On a obtenu le caractère défini positif.

b. Posons $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour tout n entier naturel. Un calcul classique, par une intégration par parties, donne $I_0 = 1$ puis $I_n = nI_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $I_n = n!$ pour tout n entier naturel.

Ensuite, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(X^p|X^q) = I_{p+q} = (p+q)!$

c. Notons $\mathcal{E} = (E_0, E_1, E_2)$ l'orthonormalisée de la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

• D'abord, $\|1\|^2 = (1|1) = I_0 = 1$, le polynôme constant est donc unitaire (dans le sens "de norme 1"). On pose donc $E_0 = 1$.

• Ensuite, $(E_0|X) = (1|X) = 1$, donc $V_1 = X - (E_0|X)\,E_0 = X - 1$, qu'il reste à "normer". On calcule

$$\|X-1\|^2 = (X-1|X-1) = (X|X) - 2\cdot(1|X) + (1|1) = 2 - 2 + 1 = 1\ ,$$

donc $E_1 = \dfrac{V_1}{\|V_1\|} = V_1 = X - 1$.

• Enfin, $(E_0|X^2) = (1|X^2) = 2$ et $(E_1|X^2) = (X|X^2) - (1|X^2) = 6 - 2 = 4$, donc

$$V_2 = X^2 - (E_0|X^2)\,E_0 - (E_1|X^2)\,E_1 = X^2 - 2 - 4(X-1) = X^2 - 4X + 2\ ,$$

puis $\|V_2\|^2 = 4$ (*y'a un petit calcul*), donc $E_2 = \dfrac{V_2}{\|V_2\|} = \dfrac{V_2}{2} = \dfrac{1}{2}(X^2 - 4X + 2)$.

---

8. L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ tel que

$$\forall (P,Q) \in E^2 \qquad (P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

a. Établir l'existence et l'unicité d'une famille orthogonale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que, pour tout n, le polynôme P_n soit unitaire (i.e. de coefficient dominant 1) de degré n.

b. Étudier la parité du polynôme P_n.

c. Pour $n \geq 2$, montrer que $P_{n+1} - XP_n \in \big(\mathbb{R}_{n-2}[X]\big)^{\perp}$.

d. En déduire l'existence, pour tout $n \geq 1$, d'un réel λ_n tel que $P_{n+1} = XP_n + \lambda_n\,P_{n-1}$.

- -

a. Notons (E_n) la famille orthonormalisée de la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors chaque polynôme E_n est de degré n: en effet, on a, par construction,

$$\mathrm{Vect}(E_1,\cdots,E_n) = \mathrm{Vect}(1,X,\cdots,X^n) = \mathbb{R}_n[X]\ ,$$

donc $E_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\deg(E_n) \leq n$. Et on ne peut avoir $\deg(E_n) < n$, sinon la famille $(E_0,\cdots,E_n)$ serait liée. Notons a_n le coefficient dominant du polynôme E_n. La famille de polynômes (P_n), avec $P_n = \dfrac{E_n}{a_n}$ convient.

Réciproquement, si une famille de polynômes (P_n) convient, en posant $U_n = \dfrac{P_n}{\|P_n\|}$, on a une famille orthonormale telle que $\deg(U_n) = n$ pour tout n, donc telle que $\mathrm{Vect}(U_0,\cdots,U_n) = \mathrm{Vect}(1,X,\cdots,X^n)$ pour tout n, c'est donc, aux signes près, l'orthonormalisée de la base canonique, i.e. il existe pour tout n un $\varepsilon_n \in \{-1,1\}$ tel que $U_n = \varepsilon_n E_n$. En considérant les coefficients dominants, on a $\dfrac{1}{\|P_n\|} = \varepsilon_n a_n$, ou $\|P_n\| = \dfrac{1}{\varepsilon_n a_n}$, d'où

$$P_n = \|P_n\|\,U_n = \|P_n\|\,\varepsilon_n E_n = \frac{E_n}{a_n}\ ,$$

ce qui prouve l'unicité.

b. Si, pour tout polynôme P, on note $\widehat{P}$ le polynôme défini par $\widehat{P}(X) = P(-X)$, on vérifie que $\big(\widehat{P}|\widehat{Q}\big) = (P|Q)$. Soit, pour tout n, le polynôme$Q_n = (-1)^n \widehat{P_n}$, i.e. $Q_n(X) = (-1)^n P_n(-X)$. Si $m \neq n$, alors $(Q_m|Q_n) = (-1)^{m+n}\big(\widehat{P_m} \mid \widehat{P_n}\big) = (-1)^{m+n}\,(P_m|P_n) = 0$. La famille (Q_n) est donc encore orthogonale, et il est clair que chaque polynôme Q_n est unitaire de degré n. Par la propriété d'unicité, on a $Q_n = P_n$, donc P_n est de la même parité que l'entier n.

c. Par construction, on a $P_n \in \big(\mathbb{R}_{n-1}[X]\big)^{\perp}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc $P_{n+1} \in \big(\mathbb{R}_n[X]\big)^{\perp}$ et, a fortiori, $P_{n+1} \in \big(\mathbb{R}_{n-2}[X]\big)^{\perp}$. Ensuite, si $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, alors $XQ \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $(XP_n|Q) = (P_n|XQ) = 0$, donc $XQ \in \big(\mathbb{R}_{n-2}[X]\big)^{\perp}$. Par bilinéarité du produit scalaire, on déduit $P_{n+1} - XP_n \in \big(\mathbb{R}_{n-2}[X]\big)^{\perp}$.

d. Comme P_{n+1} et XP_n sont unitaires de degré $n+1$, le polynôme $P_{n+1} - XP_n$ est de degré au plus n. De plus, $P_{n+1} - XP_n$ est de parité opposé à celle de l'entier n, donc il ne contient pas de terme en X^n et appartient finalement à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Pour $n = 1$, c'est fini. Pour $n \geq 2$, comme $(P_0, \cdots, P_{n-1})$ est une base (orthogonale) de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on peut écrire $P_{n+1} - XP_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k$ et, en faisant le produit scalaire avec P_j $(0 \leq j \leq n-2)$, on obtient $\alpha_j = 0$, il reste donc $P_{n+1} - XP_n = \alpha_{n-1} P_{n-1}$, ce qu'il fallait démontrer (à un changement de notation près).

9.a. Transformer en produit l'expression $\sin(n+1)x + \sin(n-1)x$. En déduire que, pour tout n entier naturel, il existe un unique polynôme U_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin x \cdot U_n(\cos x) = \sin(n+1)x\ .$$

b. Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et que la famille $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

- -

a. • $\sin(n+1)x + \sin(n-1)x = 2\,\cos x\,\sin(nx)$.

• Unicité : si, pour un n donné, il existait deux polynômes U et V tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sin(n+1)x = \sin x \cdot U(\cos x) = \sin x \cdot V(\cos x)\ ,$$

alors on aurait $\forall x \in\,]0,\pi[\quad U(\cos x) = V(\cos x)$ puisque $\sin x$ n'est pas nul. Ensuite, la fonction cos réalise une bijection de $]0,\pi[$ vers $]-1,1[$, donc $\forall t \in\,]-1,1[\quad U(t) = V(t)$: le polynôme $U - V$ aurait une infinité de racines, d'où $U = V$.

• Existence par récurrence (double) sur n : Pour $n = 0$ et $n = 1$, les polynômes $U_0 = 1$ et $U_1 = 2X$ conviennent. Supposons l'existence de polynômes U_{n-2} et U_{n-1} pour un entier $n \geq 2$ donné, alors

$$\begin{aligned}
\sin(n+1)x &= 2\,\cos x\,\sin(nx) - \sin(n-1)x \\
&= 2\,\cos x\,\sin x \cdot U_{n-1}(\cos x) - \sin x \cdot U_{n-2}(\cos x) \\
&= \sin x \cdot U_n(\cos x)\ ,
\end{aligned}$$

où U_n est le polynôme défini par $U_n = 2\,X\,U_{n-1} - U_{n-2}$.

b. On vérifie rapidement que $(\cdot|\cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}[X]$. De plus, $(P|P) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,P(t)^2\,\mathrm{d}t \geq 0$ et, si $(P|P) = 0$, alors la fonction $t \mapsto \sqrt{1-t^2}\,P(t)^2$ est nulle sur $[-1,1]$ (fonction **continue** positive d'intégrale nulle), donc $\forall t \in]-1,1[\quad P(t) = 0$: le polynôme P a une infinité de racines, donc $P = 0$, on a prouvé le caractère défini positif.

Si p et q sont deux entiers naturels distincts, on a

$$\begin{aligned}
(U_p|U_q) &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\,U_p(t)\,U_q(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_\pi^0 \sqrt{1-\cos^2 x}\,U_p(\cos x)\,U_q(\cos x)\,(-\sin x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \big(\sin x \cdot U_p(\cos x)\big)\,\big(\sin x \cdot U_q(\cos x)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi \sin(p+1)x \cdot \sin(q+1)x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \Big[\cos(p-q)x - \cos(p+q+2)x\Big]\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(p-q)x}{p-q}\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(p+q+2)x}{p+q+2}\right]_0^\pi \\
&= 0\ :
\end{aligned}$$

la famille $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

---

10. Soient $x_1, \cdots, x_n$ des vecteurs d'un espace préhilbertien réel E. On note $G = (g_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $g_{ij} = (x_i|x_j)$.

a. Montrer qu'il existe une matrice (rectangulaire) M telle que $G = M^\top M$. *On pourra pour cela introduire une base orthonormale du s.e.v.* $F = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$.

b. En déduire que le rang de la matrice G est égal au rang de la famille de vecteurs $(x_1, \cdots, x_n)$.

- -

a. Soit r le rang de la famille de vecteurs $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$, le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$ de E est de dimension r, et admet une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_r)$. Notons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{X}$ relativement à la base $\mathcal{B}$: si $M = (a_{k,l})_{1\leq k\leq r, 1\leq l\leq n}$, alors pour tout $l \in [\![1,n]\!]$, on a $x_l = \displaystyle\sum_{k=1}^r a_{k,l}e_k$ (le l-ème vecteur est disposé sur la l-ème colonne). On vérifie alors que, si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $g_{i,j} = (x_i|x_j) = \displaystyle\sum_{k=1}^r a_{k,i}a_{k,j} = (M^\top M)_{i,j}$, donc $G = M^\top M$.

b. Montrons d'abord le résultat suivant : si $M \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ est une matrice rectangulaire quelconque, alors $\mathrm{Ker}(M^\top M) = \mathrm{Ker}\,M$. En effet, soit $X \in \mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

- si $MX = 0_r$, alors $M^\top MX = 0_n$ (donc $\operatorname{Ker} M \subset \operatorname{Ker}(M^\top M)$) ;
- si $M^\top MX = 0_n$, alors $X^\top M^\top MX = 0$, soit $(MX)^\top (MX) = 0$, donc $\|MX\|^2 = 0$ (norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^r$), donc $MX = 0_r$ (et cela prouve l'inclusion inverse).

Les matrices M et $G = M^\top M$ ayant le même nombre de colonnes n (dimension de l'espace de départ de l'application linéaire canoniquement associée), le théorème du rang permet d'écrire

$$\begin{aligned} rg(G) &= \operatorname{rg}(M^\top M) \quad = \quad n - \dim \operatorname{Ker}(M^\top M) \\ &= n - \dim(\operatorname{Ker} M) \\ &= \operatorname{rg}(M) \quad = \quad \operatorname{rg}\big(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})\big) \quad = \quad \operatorname{rg}(\mathcal{X}) \ . \end{aligned}$$

c. Remarque : Montrons directement le résultat du **b.** Pour cela, notons $C_1, \cdots, C_n$ les vecteurs-colonnes de la matrice G qui sont des éléments de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

• Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = 0_E$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j g_{i,j} = \sum_{j=1}^n \lambda_j (x_i|x_j) = \Big(x_i \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\Big) = (x_i|0_E) = 0 \ ,$$

on en déduit la relation $\displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0_n$ dans $\mathbb{R}^n$.

• Inversement, si des réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ vérifient $\displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0_n$, alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j g_{i,j} = \Big(x_i \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\Big) = 0$, d'où

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \Big(x_i \mid \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\Big) = \Big\| \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \Big\|^2 = 0$$

et $\displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = 0_E$.

• On a donc prouvé l'équivalence

$$\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0_n \iff \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j = 0_E \ :$$

les relations de dépendance linéaire entre les colonnes de la matrice G sont exactement les mêmes que les relations entre les vecteurs x_j eux-mêmes. Autrement dit, les applications linéaires

$$\left\{ \begin{array}{lccc} \varphi : & \mathbb{R}^n & \to & E \\ & (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lccc} \psi : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j \end{array} \right.$$

ont le même noyau ; comme elles ont le même espace de départ (de dimension finie), on déduit qu'elles ont le même rang, soit

$$\mathrm{rg}(x_1, \cdots, x_n) = \mathrm{rg}\,\varphi = \mathrm{rg}\,\psi = \mathrm{rg}(C_1, \cdots, C_n) = \mathrm{rg}(G)\ .$$

---

11. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire :

$$(P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Déterminer la base de E obtenue par orthonormalisation de Schmidt de la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2, X^3)$.

- -

• On commence par justifier que $(\cdot|\cdot)$ est bien un produit scalaire sur E (*laissé au lecteur*).

• Posons $e_i = X^i$ $(0 \leq i \leq 3)$, et notons (u_0, u_1, u_2, u_3) la base orthonormalisée. D'abord, $u_0 = \dfrac{e_0}{\|e_0\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ puisque $\|e_0\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{d}t = 2$. On constate ensuite que les vecteurs e_0 et e_1 sont orthogonaux puisque $(e_0|e_1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t = 0$, il suffit donc de normer le vecteur e_1, et $u_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,X$ puisque $\|e_1\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{3}$.

On pose ensuite $v_2 = e_2 - (u_0|e_2)\,u_0 - (u_1|e_2)\,u_1 = e_2 - \dfrac{\sqrt{2}}{3}\,u_0 = X^2 - \dfrac{1}{3}$, on norme ensuite ce vecteur, et

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \sqrt{\frac{45}{8}}\,v_2 = \frac{\sqrt{10}}{4}\,(3X^2 - 1)\ .$$

Enfin, on pose $v_3 = e_3 - (u_0|e_3)\,u_0 - (u_1|e_3)\,u_1 - (u_2|e_3)\,u_2 = e_3 - \dfrac{\sqrt{6}}{5}\,u_1 = X^3 - \dfrac{3}{5}\,X$, et on le norme :

$$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\,v_3 = \frac{\sqrt{14}}{4}\,(5X^3 - 3X)\ .$$

12*. Soit E un espace euclidien, soit u un endomorphisme de E, de trace nulle.

a. Montrer qu'il existe un vecteur x non nul de E tel que $\big(u(x)|x\big) = 0$.

b. Montrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls. *On pourra raisonner par récurrence sur la dimension de E.*

- -

a. Soit $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de E, on a alors $\mathrm{tr}(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(u(\varepsilon_i)|\varepsilon_i\big) = 0$.

Si tous les termes de cette somme sont nuls, alors $x = \varepsilon_i$ convient, pour n'importe quel $i \in [\![1, n]\!]$.

Sinon, comme la somme est nulle, il existe deux indices i et j distincts tels que $\big(u(\varepsilon_i)|\varepsilon_i\big) > 0$ et $\big(u(\varepsilon_j)|\varepsilon_j\big) < 0$. L'application $f : t \mapsto \Big(u\big((1-t)\varepsilon_i + t\varepsilon_j\ \big)\big|(1-t)\varepsilon_i + t\varepsilon_j\Big)$ est continue sur $[0, 1]$, cela résulte notamment de la continuité des applications linéaires (l'endomorphisme u) et bilinéaires (le produit scalaire) en dimension finie. Comme $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $f(t_0) = 0$. Le vecteur $x = (1 - t_0)\varepsilon_i + t_0\varepsilon_j$ convient alors (il est non nul cas ε_i et ε_j ne sont pas colinéaires).

b. Initialisation évidente: si $n = \dim(E) = 1$, si $\mathrm{tr}(u) = 0$, alors u est l'endomorphisme nul.

Soit $n \geq 2$, supposons la propriété vraie dans tout espace euclidien de dimension $n - 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E euclidien de dimension n. La question **a.** permet d'obtenir un vecteur unitaire e_1 de E tel que $\big(u(e_1)|e_1\big) = 0$. Soit $D = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $H = D^{\perp}$. Si $\mathcal{C} = (e_2, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de H, alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix}$ avec $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(u) = 0$. Notons v l'endomorphisme de H tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(v) = A$, on a alors $\mathrm{tr}(v) = \mathrm{tr}(A) = 0$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe alors une base orthonormale $\mathcal{C}' = (e'_2, \cdots, e'_n)$ de H telle que les coefficients diagonaux de la matrice $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}'}(v)$ soient tous nuls. La famille $\mathcal{B}' = (e_1, e'_2, \cdots, e'_n)$ est alors une base orthonormale de E, et la matrice M' de u dans cette base a tous ses coefficients diagonaux nuls. En effet, soit $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ dans E. Comme le premier vecteur e_1 est inchangé et que $\mathrm{Vect}(e'_2, \cdots, e'_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n) = H$, cette matrice est de la forme $P = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q \end{pmatrix}$ avec $Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$. Un calcul par blocs montre que

$$M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & LQ \\ Q^{-1}C & A' \end{pmatrix} .$$

Les coefficients diagonaux de M', qui sont 0 et les coefficients diagonaux de A', sont donc nuls.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

13. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $I(a, b) = \displaystyle\int_0^{\pi} (a \sin x + b \cos x - x)^2 \, \mathrm{d}x$. Déterminer le minimum de $I(a, b)$ lorsque (a, b) décrit $\mathbb{R}^2$.

- -

Soit $E = \mathcal{C}\big([0, \pi], \mathbb{R}\big)$, muni du produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_{[0,\pi]} fg$. Soient les fonctions

$$e : x \mapsto x \quad ; \quad s : x \mapsto \sin x \quad ; \quad c : x \mapsto \cos x \,.$$

Alors $I(a, b) = \|e - (a\, s + b\, c)\|^2$ et, si l'on note P le plan vectoriel $P = \mathrm{Vect}(s, c)$, alors

$$m := \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} I(a, b) = d(e, P)^2 = \|e\|^2 - \|p_P(e)\|^2 \,,$$

en notant p_P le projecteur orthogonal sur le plan P. D'autre part, si $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base orthonormale du plan P, on a

$$p_P(e)=(\varepsilon_1|e)\,\varepsilon_1+(\varepsilon_2|e)\,\varepsilon_2 \qquad \text{et} \qquad \|p_P(e)\|^2=(\varepsilon_1|e)^2+(\varepsilon_2|e)^2\ .$$

La famille (s,c) est orthogonale puisque $(s|c)=\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\ \cos x\ \mathrm{d}x=0$, il suffit donc de normer ces "vecteurs" pour avoir une base orthonormale du plan P. Or, $\|s\|^2=\|c\|^2=\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 x\ \mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos^2 x\ \mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, on posera donc $\varepsilon_1=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,s$ et $\varepsilon_2=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,c$. On achève l'exercice par quelques calculs d'intégrales :

$$(\varepsilon_1|e)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=\sqrt{2\pi}\quad;\quad(\varepsilon_2|e)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}x\cos x\mathrm{d}x=-2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\quad;\quad\|e\|^2=\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{3}\ ;$$

enfin,

$$m=\|e\|^2-(\varepsilon_1|e)^2-(\varepsilon_2|e)^2=\frac{\pi^3}{3}-2\pi-\frac{8}{\pi}\ .$$

---

14. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on pose $I(a,b)=\displaystyle\int_0^1(ax+b-\ln x)^2\ \mathrm{d}x$. Déterminer le minimum de $I(a,b)$ lorsque (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$.

- -

Soit $E=L^2(]0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues et de carré intégrable sur l'intervalle $]0,1]$, à valeurs réelles. On munit cet espace vectoriel du produit scalaire défini par $(f|g)=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$, c'est ainsi un espace préhilbertien. Soient les fonctions $u:x\mapsto x$, $v:x\mapsto 1$ et $f:x\mapsto\ln(x)$ sur $]0,1]$, elles appartiennent à E: c'est évident pour les deux premières qui sont prolongeables en des fonctions continues sur le segment $[0,1]$. Par croissances comparées, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\,(\ln x)^2=0$, donc $(\ln x)^2=o\Big(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Big)$ lorsque x tend vers 0^+, ce qui garantit que la fonction $f=\ln$ est de carré intégrable sur $]0,1]$.

On a alors $I(a,b)=\|au+bv-f\|^2$, et rechercher le minimum de cette expression revient à rechercher la distance minimale du "vecteur" f à un "vecteur" de la forme $au+bv$, c'est-à-dire décrivant le plan vectoriel $P=\mathrm{Vect}(u,v)$. Finalement,

$$m=\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}I(a,b)=d(f,P)^2=\|f-p_P(f)\|^2=\|f\|^2-\|p_P(f)\|^2$$

selon des formules du cours (c'est essentiellement la relation de Pythagore). Si l'on dispose d'une base orthonormale (e_0,e_1) du plan P, on aura alors $p_P(f)=(e_0|f)e_0+(e_1|f)e_1$, puis

$$\textbf{(*)}\quad:\qquad\|p_P(f)\|^2=(e_0|f)^2+(e_1|f)^2\ .$$

Passons aux calculs: il s'agit donc d'orthonormaliser la base (v,u) du plan P et de calculer quelques produits scalaires, autrement dit des intégrales.

C'est parti pour le schmidtage: on a $\|v\|^2=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}t=1$, donc $e_0=v$, c'est-à-dire $e_0(x)=1$.

Puis $(e_0|u)=(v|u)=\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$, donc on va poser $\varepsilon_1=u-p_v(u)=u-(v|u)v=u-\dfrac{1}{2}v$, soit la fonction $x \mapsto x - \dfrac{1}{2}$. On a $\|\varepsilon_1\|^2 = \displaystyle\int_0^1 \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}$, puis $e_1 = \dfrac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|} = 2\sqrt{3}\,\varepsilon_1$, donc $e_1(x) = \sqrt{3}(2x-1)$.

De **(*)** ci-dessus, on déduit

$$\|p_P(f)\|^2 = \Big(\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x\Big)^2 + 3\,\Big(\int_0^1 (2x-1)\,\ln x\,\mathrm{d}x\Big)^2 = 1 + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4}\,,$$

puis $m = \displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} I(a,b) = \|f\|^2 - \|p_P(f)\|^2 = \int_0^1 (\ln x)^2\,\mathrm{d}x - \frac{7}{4} = 2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}$.

---

15. L'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire $(A|B) = \mathrm{tr}(A^\top B)$. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, soit $\mathcal{H}$ l'hyperplan constitué des matrices de trace nulle. Déterminer la distance $d(J,\mathcal{H})$.

- -

L'hyperplan $\mathcal{H}$ est constitué des matrices M telles que $\mathrm{tr}(I_n^\top M) = 0$, autrement dit telles que $(I_n|M) = 0$. L'orthogonal de l'hyperplan $\mathcal{H}$ est donc la droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(I_n)$ constituée des “matrices scalaires”. Autrement dit, un “vecteur” unitaire normal à cet hyperplan $\mathcal{H}$ est la matrice $N = \dfrac{I_n}{\|I_n\|} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,I_n$. On en déduit, d'après le cours, que

$$d(J,\mathcal{H}) = \big\|p_D(J)\big\| = \big\|(N|J)\,N\big\| = \big|(N|J)\big| = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{tr}(J) = \sqrt{n}\,.$$

Projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien

16. On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$, muni du produit scalaire défini par $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k b_k$ si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^n b_k X^k$. Déterminer le projeté orthogonal du polynôme constant $P_0 = 1$ sur l'hyperplan $H = \big\{P \in E \mid P(1) = 0\big\}$.

- -

On a $H = \Big\{P = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X] \;\Big|\; a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0\Big\}$, donc un “vecteur” normal à l'hyperplan H est le polynôme $N = 1 + X + \cdots + X^n$. Pour avoir un vecteur normal unitaire (i.e. de norme 1), on considère le polynôme $U = \dfrac{N}{\|N\|} = \dfrac{N}{\sqrt{n+1}}$. Alors $H^\perp = D = \mathrm{Vect}(U)$ dans l'espace euclidien E. Le projeté orthogonal de $P_0 = 1$ sur D est donné par la formule bien connue

$$p_D(P_0) = (U|P_0)\,U = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,\frac{N}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{n+1}(1 + X + \cdots + X^n)\,.$$

Enfin, P et H étant supplémentaires orthogonaux dans E, on a

$$p_H(P_0) = P_0 - p_D(P_0) = 1 - \frac{1}{n+1}N = \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} X^k \ .$$

---

17. Soit p un projecteur dans un espace euclidien E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leq \|x\|$.

- -

Posons $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \operatorname{Ker} p$. On a alors $E = F \oplus G$, et p est le projecteur sur F parallèlement à G. Dire que p est un projecteur orthogonal signifie que $G = F^{\perp}$.

• Si p est un projecteur orthogonal, on a $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout x de E, c'est du cours, c'est l'**inégalité de Bessel**. Sa preuve est simple: on écrit $x = p(x) + \big(x - p(x)\big)$, avec $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in G = F^{\perp}$, ces deux vecteurs sont donc orthogonaux et la relation de Pythagore donne $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$.

• Si p vérifie la relation $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout x, choisissons x appartenant à $G^{\perp}$. Comme $p(x) - x \in G = \operatorname{Ker} p$, ces deux vecteurs sont orthogonaux et de nouveau Pythagore nous donne

$$\|p(x)\|^2 = \big\|x + \big(p(x) - x\big)\big\|^2 = \|x\|^2 + \|p(x) - x\|^2 \ .$$

L'hypothèse $\|p(x)\| \leq \|x\|$ entraîne alors que $\|p(x) - x\|^2 \leq 0$, ce qui n'est possible que si $p(x) - x = 0_E$, c'est-à-dire si $x \in F$. On a ainsi prouvé l'inclusion $G^{\perp} \subset F$. Comme $G^{\perp}$ et F sont tous deux des supplémentaires de G, on a d'autre part égalité des dimensions, donc $G^{\perp} = F$, puis $(G^{\perp})^{\perp} = F^{\perp}$, soit $G = F^{\perp}$, ce qu'il fallait démontrer.

18.a. Soit p un projecteur orthogonal dans un espace euclidien E. Montrer que, pour tout $x \in E$, on a $\|p(x)\| \leq \|x\|$ et $\big(p(x)|x\big) \geq 0$. Dans quel cas a-t-on $\big(p(x)|x\big) = 0$?

b. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E. Montrer que les valeurs propres de l'endomorphisme $f = p \circ q$ appartiennent à $[0, 1]$.

- -

a. • Si p est le projecteur orthogonal sur le sous-espace F, alors $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^{\perp}$, donc ces deux vecteurs sont orthogonaux et la relation de Pythagore s'applique :

$$\|x\|^2 = \big\|p(x) + \big(x - p(x)\big)\big\|^2 = \big\|p(x)\big\|^2 + \big\|x - p(x)\big\|^2 \geq \big\|p(x)\big\|^2 \ ;$$

on a donc $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout x.

• On a $\big(p(x)|x\big) = \big(p(x)|p(x)\big) + \big(p(x)|x - p(x)\big) = \|p(x)\|^2 \geq 0$, puisque les vecteurs $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux. De plus, $\big(p(x)|x\big) = 0 \iff p(x) = 0 \iff x \in F^{\perp}$.

b. Soit λ une valeur propre de $f = p \circ q$, soit x un vecteur propre associé : $f(x) = \lambda x$ et $x \neq 0$.

• On a $\|f(x)\| = \big\|p\big(q(x)\big)\big\| \leq \big\|q(x)\big\| \leq \|x\|$ d'après **a.**, donc $|\lambda|\ \|x\| \leq \|x\|$, et $|\lambda| \leq 1$, autrement dit $\lambda \in [-1, 1]$.

• On a aussi $\big(f(x)|q(x)\big) = \big(p\big(q(x)\big)|q(x)\big) = \big\|p\big(q(x)\big)\big\|^2 = \|f(x)\|^2 \geq 0$, mais

$$\big(f(x)|q(x)\big) = \big(\lambda\, x|q(x)\big) = \lambda\, \big(x|q(x)\big) = \lambda\, \|q(x)\|^2 \ .$$

Donc $\lambda\,\|q(x)\|^2 \geq 0$; si $q(x)=0$, alors $f(x)=p\big(q(x)\big)=0$ donc $\lambda=0$; sinon, $\|q(x)\|^2>0$ donc $\lambda \geq 0$. Dans tous les cas, on déduit $\lambda \in [0,1]$.

---

19. Soit H un hyperplan d'un espace euclidien E, soit u un vecteur de E n'appartenant pas à H, soit n un vecteur normal à H. On note p le projecteur sur H parallèlement à $D=\mathrm{Vect}(u)$. Pour tout $x \in E$, exprimer $p(x)$ à l'aide des vecteurs x, n et u.

- -

Comme u est un vecteur de E n'appartenant pas à l'hyperplan H, on sait que la droite $D=\mathrm{Vect}(u)$ est un supplémentaire de H dans E. Tout vecteur x de E admet donc une unique décomposition en $x=h+\lambda u$ avec $h \in H$ et λ réel, et on a alors $p(x)=h$.

Il suffit de faire le produit scalaire avec n. Comme $(n|u)=0$, cela donne

$$(n|x)=(n|h+\lambda u)=(n|h)+\lambda\,(n|u)=\lambda\,(n|u)$$

donc $\lambda=\dfrac{(n|x)}{(n|u)}$. *En effet,* $(n|u)$ *est non nul puisque* $u \notin H$. Finalement,

$$p(x)=h=x-\frac{(n|x)}{(n|u)}\,u\ .$$

Remarque. J'ai supprimé les hypothèses que u et n sont unitaires, qui ne servent à rien!

Isométries. Matrices orthogonales.

20. Montrer que les endomorphismes orthogonaux d'un espace euclidien E qui sont diagonalisables sont les symétries orthogonales.

- -

• Soit $u \in \mathrm{O}(E)$, alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1,1\}$. Si u est diagonalisable, l'endomorphisme u admet alors comme polynôme annulateur $(X-1)(X+1)$, donc $u^2-\mathrm{id}_E=0$ et u est une symétrie. Enfin, si une symétrie u est une isométrie vectorielle, alors c'est une symétrie orthogonale: en effet, soient $F=\mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E)$ et $G=\mathrm{Ker}(u+\mathrm{id}_E)$, on a alors $E=F\oplus G$ et u est la symétrie "par rapport à F et parallèlement à G". Si on prend $y \in F$ et $z \in G$, on a $(y|z)=\big(u(y)|-u(z)\big)=-\big(u(y)|u(z)\big)=-(y|z)$ par conservation du produit scalaire, donc $(y|z)=0$. Ainsi, $G \subset F^{\perp}$ et, par des arguments de dimensions, $G=F^{\perp}$, ce qui prouve que u est une "symétrie orthogonale".

• Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie orthogonale, alors u est une isométrie vectorielle (un automorphisme orthogonal): en effet, si u est la symétrie orthogonale par rapport à F, si $x \in E$, on a $x=y+z$ avec $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$, puis $u(x)=y-z$, et enfin, les vecteurs y et z étant orthogonaux, de Pythagore, on déduit que $\|x\|^2=\big\|u(x)\big\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2$, ainsi u conserve la norme. De plus, u vérifie $u^2=\mathrm{id}_E$, donc admet pour polynôme annulateur $(X-1)(X+1)$, qui est scindé à racines simples, donc u est diagonalisable.

21*. Déterminer les matrices orthogonales de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

- -

Soit $A=(a_{i,j})$ une telle matrice.

Si j et k sont deux indices distincts dans $[\![1,n]\!]$, alors les colonnes C_j et C_k sont orthogonales, i.e. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}a_{i,k} = 0$. Mais les termes de cette somme étant tous positifs, ils sont donc tous nuls. On a donc obtenu

$$\textbf{(*)} \qquad \forall (i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3 \qquad j \neq k \Longrightarrow a_{i,j}a_{i,k} = 0\ .$$

On en déduit que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la i-ème ligne comporte exactement un coefficient non nul. En effet, elle en comporte au moins sinon la matrice A ne serait pas inversible. Si $j_0 \in [\![1,n]\!]$ est tel que $a_{i,j_0} \neq 0$, alors la relation **(*)** entraîne que tous les autres coefficients de la ligne i sont nuls. Ce coefficient a_{i,j_0} vaut nécessairement 1 puisqu'il doit être positif et que chaque ligne est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$.

On peut maintenant définir une application $\sigma : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telle que, pour tout i, le seul coefficient non nul de la i-ème ligne soit $a_{i,\sigma(i)}$. Cette application est injective puisque, si l'on avait $\sigma(i) = \sigma(i')$ avec $i \neq i'$, alors la colonne numéro $\sigma(i)$ comporterait deux coefficients non nuls, ce qui est aussi impossible (même raisonnement que celui fait sur les lignes). Elle est donc bijective, et c'est une permutation de l'ensemble $[\![1,n]\!]$.

Les matrices ainsi obtenues sont appelées **matrices de permutation** et elles sont bien sûr au nombre de $n!$. Réciproquement, il est immédiat que ces matrices conviennent.

---

22. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathrm{O}(n)$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i,j} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$ et $\displaystyle\Big|\sum_{i,j} a_{ij}\Big| \leq n$. *On pourra utiliser le vecteur* $U = (1,1,\cdots,1)$ *de* $\mathbb{R}^n$.

- -

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique : si $X = (x_1,\cdots,x_n)$ et $Y = (y_1,\cdots,y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on a alors $|(X|Y)| \leq \|X\|\ \|Y\|$, ou encore $\displaystyle\Big|\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\Big| \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)^{1/2}$. En particulier, si on prend pour Y le vecteur $U = (1,\cdots,1)$, on obtient $\displaystyle\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i\Big| \leq \sqrt{n}\,\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2}$. Et si l'on remplace le vecteur X par le vecteur $X' = (|x_1|,\cdots,|x_n|)$, on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sqrt{n}\,\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2}$, ou encore $\|X\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|X\|_2$ (*normes usuelles sur* $\mathbb{R}^n$).

Notons C_1, $\cdots$, C_n les vecteurs-colonnes de la matrice A, ainsi $C_j = (a_{1j},\cdots,a_{nj}) \in \mathbb{R}^n$; la matrice A étant orthogonale, on sait que la somme des carrés des coefficients de chaque colonne vaut 1, autrement dit $\|C_j\|_2 = 1$ pour tout j, donc par Cauchy-Schwarz, on a $\|C_j\|_1 \leq \sqrt{n}$, d'où

$$\sum_{i,j} |a_{i,j}| = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|\Big) = \sum_{j=1}^{n} \|C_j\|_1 \leq n\sqrt{n}\ .$$

D'autre part, posons $V = (v_1,\cdots,v_n) = AU$, on vérifie que $\displaystyle v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$: la i-ième coordonnée du vecteur V est la somme des coefficients de la i-ième ligne de la matrice A. On a, toujours par Cauchy-Schwarz,

$$\Big|\sum_{i,j} a_{i,j}\Big| = \Big|\sum_{i=1}^{n} w_i\Big| \leq \sqrt{n}\,\Big(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\Big)^{1/2} = \sqrt{n}\,\|V\|_2\ .$$

Or, $\|V\|_2 = \|AU\|_2 = \|U\|_2 = \sqrt{n}$: en effet, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A est orthogonal, donc conserve la norme (euclidienne) des vecteurs, ou encore, plus formellement,

$$\|V\|_2^2 = V^\top V = (AU)^\top\,(AU) = U^\top A^\top AU = U^\top U = \|U\|_2^2$$

puisque $A^\top A = I_n$. On en déduit la deuxième inégalité demandée.

---

23. Soient M et N deux matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'égalité $M^\top M = N^\top N$ a lieu si et seulement s'il existe une matrice orthogonale U telle que $M = UN$.

- -

• Si $M = UN$ avec U orthogonale, alors $M^\top M = (UN)^\top UN = N^\top U^\top UN = N^\top N$, puisque $U^\top U = I_n$.

• Réciproquement, si $M^\top M = N^\top N$, posons $U = MN^{-1}$, alors

$$U^\top = (N^{-1})^\top M^\top = (N^\top)^{-1} M^\top\ ,$$

on a alors

$$U^\top U = (N^\top)^{-1} M^\top M N^{-1} = (N^\top)^{-1} N^\top N N^{-1} = I_n\ ,$$

donc U est orthogonale et $M = UN$, ce qu'il fallait démontrer.

25.a. Soit $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale telle que $M + M^\top = 2I_n$. Montrer que $M = I_n$.

b. Soient A et B deux matrices orthogonales distinctes dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$[A,B]\ \cap\ \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A,B\}\ .$$

- -

a. Posons $M = (a_{i,j})$. La relation $M + M^\top = 2I_n$ donne en particulier $2a_{j,j} = 2$ pour tout j, les coefficients diagonaux $a_{j,j}$ de la matrice M sont donc tous égaux à 1. Comme, pour tout j, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = \|C_j\|^2 = 1$ (la somme des carrés des coefficients de la j-ème colonne vaut 1), on en déduit que les autres coefficients (non diagonaux) de cette colonne sont nuls. Donc $A = I_n$.

b. Soient A et B deux matrices orthogonales. Soit $M \in [A,B]$, alors $M = (1-\lambda)A + \lambda B$ avec $\lambda \in [0,1]$. Si on suppose M orthogonale, alors $M^\top M = I_n$, soit

$$\Big((1-\lambda)A + \lambda B\Big)^\top\ \Big((1-\lambda)A + \lambda B\Big) = I_n\ ,$$

$$\text{i.e.}\qquad (1-\lambda)^2\,A^\top A + \lambda(1-\lambda)\,(A^\top B + B^\top A) + \lambda^2\,B^\top B = I_n\ ,$$

$$\text{i.e.}\qquad (1-\lambda)\lambda\,(A^\top B + B^\top A) = 2\,\lambda(1-\lambda)\,I_n\ ,$$

$$\text{i.e.}\qquad (1-\lambda)\lambda\left[(A^\top B+B^\top A)-2\,I_n\right]=0\ .$$

On en déduit que:

- soit $\lambda=0$, auquel cas $M=A$;

- soit $\lambda=1$, auquel cas $M=B$;

- soit $\lambda\in]0,1[$, auquel cas $A^\top B+B^\top A=2I_n$, i.e. $(A^\top B)+(A^\top B)^\top=2I_n$ et, comme la matrice $A^\top B=A^{-1}B$ est orthogonale, on déduit du **a.** que $A^\top B=A^{-1}B=I_n$, soit $A=B$.

L'improbable (mais toujours bienvenu) lecteur conclura.

Matrices et endomorphismes symétriques. Théorème spectral.

33. Plusieurs petites questions indépendantes:

a. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^\top A=I_n$. Montrer que $A=I_n$.

b. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $A+A^\top$ est nilpotente. Montrer que A est antisymétrique.

c. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose que A est "normale" ($AA^\top=A^\top A$) et nilpotente. Montrer que $A=0$.

- -

a. En transposant la relation $AA^\top A=I_n$, on a $A^\top AA^\top=(I_n)^\top=I_n$, puis

$$A=A\,I_n=A\,(A^\top AA^\top)=(AA^\top A)\,A^\top=I_n\,A^\top=A^\top\ :$$

la matrice A est donc symétrique réelle. On a donc en fait $A^3=I_n$. Mais, par le théorème spectral, A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, et comme elle admet pour polynôme annulateur X^3-1, sa seule valeur propre réelle possible est 1. Finalement, A est semblable à la matrice-identité I_n, puis $A=I_n$.

b. La matrice $B=A+A^\top$ est symétrique réelle (évident), elle est donc diagonalisable, et comme elle est nilpotente, sa seule valeur propre est 0. Donc $B=0$ et $A^\top=-A$.

c. La matrice $B=AA^\top=A^\top A$ est symétrique réelle (*calculer sa transposée!*), donc diagonalisable, et elle est nilpotente: en effet, A est nilpotente donc on a $A^p=0$ pour un certain entier naturel p, puis $B^p=(AA^\top)^p=A^p\,(A^\top)^p$ puisque A et $A^\top$ commutent, donc $B^p=0$. On conclut comme en **b.** que $B=0$. On a donc $A^\top A=0$, puis $\|A\|^2=\mathrm{tr}(A^\top A)=0$, donc A est la matrice nulle. *On a utilisé ici la norme sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *associée au produit scalaire "canonique" défini par* $<M,N>=\mathrm{tr}(M^\top N)$.

---

34. Que dire d'une matrice $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3-2A^2+3A=0$?

- -

Par le théorème spectral, une telle matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, mais ses valeurs propres doivent être racines du polynôme annulateur

$$P=X^3-2X^2+3X=X(X^2-2X+3)=X\left[(X-1)^2+2\right]\ .$$

La seule racine réelle de P est 0, donc $\mathrm{Sp}(A)\subset\{0\}$, puis A est semblable à la matrice nulle, puis $A=0$.

---

35. Diagonaliser, à l'aide d'une matrice de passage orthogonale, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- -

Oui, bon, c'est un exo peu intéressant! On constate que A est symétrique réelle, donc il existe effectivement $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, telles que $A = PDP^{-1} = PDP^\top$. Rechercher P revient à construire une base orthonormale de vecteurs propres. Je me borne à donner les résultats, on trouve trois valeurs propres distinctes, donc il y a trois sous-espaces propres qui sont des droites vectorielles, je signale toutefois que le fait de savoir A symétrique réelle permet, lorsqu'on dispose de deux vecteurs propres unitaires et orthogonaux, de calculer le troisième en faisant le produit vectoriel des deux premiers. On trouve

$$A = PDP^{-1} = PDP^\top\ , \qquad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

---

36. Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose $< P, Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

a. Montrer que $< \cdot, \cdot >$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

b. Soit $\varphi : P \mapsto Q = XP'' + (1 - X)P'$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, symétrique pour ce produit scalaire.

- -

a. D'abord l'intégrale converge: si P et Q sont deux polynômes, par les croissances comparées usuelles, on a $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^2\, P(t)\, Q(t)\, e^{-t} = 0$, ce qui garantit l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $t \mapsto P(t)\, Q(t)\, e^{-t}$ et l'existence de $< P, Q >$.

Bilinéarité et symétrie sont de pures formalités.

Pour le caractère défini positif, on a $< P, P >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)^2\, e^{-t}\, \mathrm{d}t \geq 0$ par positivité de l'intégrale. Et, si $< P, P >= 0$, alors la fonction **continue** et positive $t \mapsto P(t)^2\, e^{-t}$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$, ce qui entraîne que le polynôme P a une infinité de racines, donc $P = 0$. On a bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b. La linéarité de φ résulte de la linéarité de la dérivation, donc $\varphi \in \mathcal{L}\big(\mathbb{R}[X]\big)$.

Il faut ensuite vérifier l'égalité $\big\langle \varphi(P), Q \big\rangle = \big\langle P, \varphi(Q) \big\rangle$ pour $(P, Q) \in \big(\mathbb{R}[X]\big)^2$. Zou, c'est parti!

$$\begin{aligned}
\big\langle \varphi(P), Q \big\rangle &= \int_0^{+\infty} \Big(\big(t\,P''(t) + (1-t)\,P'(t)\big)\,e^{-t} \Big) \Big(Q(t) \Big)\,\mathrm{d}t \qquad \text{i.p.p.} \\
&= \Big[\Big(t\,P'(t)\,e^{-t} \Big) \Big(Q(t) \Big) \Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \Big(t\,P'(t)\,e^{-t} \Big) \Big(Q'(t) \Big)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{+\infty} t\,P'(t)\,Q'(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t\ .
\end{aligned}$$

Commentaires: on a fait une intégration par parties que le lecteur pourra retrouver facilement en s'aidant du parenthésage de ce corrigé ; cette i.p.p. sur $[0, +\infty[$ *est justifiée par la convergence des différents termes, notamment le terme entre crochets est nul.*

On obtient une expression désormais "symétrique en P et Q" (ils sont interchangeables), on trouve donc le même résultat en partant de $\big\langle P, \varphi(Q) \big\rangle$, l'endomorphisme φ est symétrique pour le produit scalaire $< \cdot, \cdot >$.

---

37. Soit E un espace euclidien, soit u un endomorphisme symétrique de E, de valeurs propres (distinctes) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, rangées dans l'ordre croissant ($\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m$). Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, notons E_i le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i.

a. Montrer que $\forall x \in E \quad \lambda_1 \|x\|^2 \leq \big(u(x)|x\big) \leq \lambda_m \|x\|^2$.

b. Pour quels vecteurs x l'une des deux inégalités ci-dessus est-elle une égalité ?

c. Soit M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $S = \dfrac{1}{2}\,(M + M^\top)$. On note α (resp. β) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de S. Montrer que toutes les valeurs propres réelles de M appartiennent à l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Qu'en déduit-on lorsque M est antisymétrique ?

- -

a. D'après le théorème spectral, u est diagonalisable donc $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m} E_i$ et on sait aussi que les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux, ce que l'on peut écrire $E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_2 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} E_m$ (c'est une somme directe orthogonale). Soit $x \in E$, on le décompose suivant cette somme directe : $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i$, on a alors $u(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$, puis $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^2$ (relation de Pythagore car les x_i constituent une famille orthogonale) et

$$\big(u(x)|x\big) = \Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \mid \sum_{j=1}^{m} x_j \Big) = \sum_{i,j} \lambda_i (x_i|x_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \|x_i\|^2\ .$$

Donc $\big(u(x)|x\big) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \|x_i\|^2 \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_1 \|x_i\|^2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^2 = \lambda_1\,\|x\|^2$; on obtient de même $\big(u(x)|x\big) \leq \lambda_m\,\|x\|^2$.

b. On a les équivalences

$$
\begin{aligned}
\big(u(x)|x\big) = \lambda_1 \, \|x\|^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{i=2}^{m} (\lambda_i - \lambda_1) \, \|x_i\|^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![2, m]\!] \quad (\lambda_i - \lambda_1) \, \|x_i\|^2 = 0 \qquad \textbf{(*)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall i \in [\![2, m]\!] \quad \|x_i\|^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in E_1
\end{aligned}
$$

(*) car une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul. De même,

$$\big(u(x)|x\big) = \lambda_m \, \|x\|^2 \iff x \in E_m \ .$$

c. Soit λ une valeur propre réelle de M, soit $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé : $X \neq 0$ et $MX = \lambda X$. La matrice S est symétrique réelle, donc représente canoniquement un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^n$, la question **a.** montre alors que $\alpha \, \|X\|^2 \leq (SX|X) \leq \beta \, \|X\|^2$, où $(\cdot|\cdot)$ représente le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ défini par $(X|Y) = X^\top Y$. On a donc

$$\alpha \, X^\top X \leq X^\top \, S \, X \leq \beta \, X^\top X \ .$$

D'autre part, $X^\top \, S \, X = \dfrac{1}{2} \left(X^\top \, M \, X + X^\top \, M^\top \, X \right) = \dfrac{1}{2} \left(X^\top \, (\lambda X) + (\lambda X)^\top \, X \right) = \lambda \, X^\top X$.
On a finalement $\alpha \, X^\top X \leq \lambda \, X^\top X \leq \beta \, X^\top X$, avec $X^\top X = \|X\|^2 > 0$, d'où $\lambda \in [\alpha, \beta]$.

Si M est antisymétrique, alors $S = \dfrac{1}{2} \, (M + M^\top) = 0$, donc $\alpha = \beta = 0$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \{0\}$.
La seule valeur propre réelle possible pour une matrice antisymétrique réelle est donc 0.

---

39. Soient u et v deux endomorphismes symétriques d'un espace euclidien E, qui commutent. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle u et v sont représentés par des matrices diagonales.

- -

Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ les valeurs propres **distinctes** de u, et $E_1, \cdots, E_m$ les sous-espaces propres associés. Si u et v commutent, les sous-espaces propres E_i de u sont stables par v. Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, notons v_i l'endomorphisme de E_i induit par v. Chaque v_i est autoadjoint puisque v l'est, donc par le théorème spectral, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_i$ de E_i constituée de vecteurs propres de v_i (et donc de v), mais les vecteurs de cette base $\mathcal{B}_i$ sont aussi des vecteurs propres de u puisqu'ils sont dans $E_i = E_{\lambda_i}(u)$. La famille de vecteurs $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation des familles $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_m$ est alors une base de E puisque $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{m} E_i$, orthonormale car chaque $\mathcal{B}_i$ est orthonormale et les E_i sont deux à deux orthogonaux. $\mathcal{B}$ est donc une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres communs aux endomorphismes u et v, c'est ce qu'il fallait construire.

---

40. Soient a et b deux vecteurs non colinéaires dans un espace euclidien E. Soit f l'endomorphisme de E défini par

$$\forall x \in E \qquad f(x) = (a|x) \, b + (b|x) \, a \ .$$

a. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

b. Montrer que f est diagonalisable.

c. Diagonaliser f.

- -

a. • $x \in \mathrm{Ker}\, f \iff (a|x)\, b + (b|x)\, a = 0_E \iff (a|x) = (b|x) = 0$ car la famille (a, b) est libre. Donc $\mathrm{Ker}\, f = \big(\mathrm{Vect}(a)\big)^\perp \cap \big(\mathrm{Vect}(b)\big)^\perp$, ou encore $\mathrm{Ker}\, f = \big(\mathrm{Vect}(a, b)\big)^\perp$. En français, $\mathrm{Ker}(f)$ est l'orthogonal du plan engendré par les vecteurs a et b.

• De l'expression de $f(x)$, on déduit que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Vect}(a, b)$. Par ailleurs, $\mathrm{Ker}\, f$ est de dimension $n-2$ avec $n = \dim(E)$, donc le théorème du rang donne $\dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$, et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(a, b)$.

b. Vérifions que l'endomorphisme f est autoadjoint: si $x \in E$ et $y \in E$,

$$\big(f(x)|y\big) = \big((a|x)\, b + (b|x)\, a \mid y\big) = (a|x)(b|y) + (b|x)(a|y)$$

et, cette expression étant visiblement symétrique en x et y, on déduit qu'elle est aussi égale à $\big(f(y)|x\big) = \big(x|f(y)\big)$. D'après le théorème spectral, l'endomorphisme f est donc diagonalisable.

c. On sait déjà que $0 \in \mathrm{Sp}(f)$, le sous-espace propre $E_0(f) = \mathrm{Ker}(f) = \big(\mathrm{Vect}(a, b)\big)^\perp$ étant de dimension $n-2$. Comme f est autoadjoint, ses sous-espaces propres sont orthogonaux, les vecteurs propres de f pour des valeurs propres autres que 0 doivent être cherchées dans $\big(E_0(f)\big)^\perp = \mathrm{Vect}(a, b) = \mathrm{Im}(f)$. *C'est d'ailleurs une propriété générale qu'un vecteur propre d'un endomorphisme f associé à une valeur propre non nulle appartient à* $\mathrm{Im}(f)$. Le plan $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(a, b)$ étant stable par f, on va considérer l'endomorphisme induit u, dont il est facile d'écrire la matrice dans la base $\mathcal{B} = (a, b)$ de ce plan. En effet, $u(a) = f(a) = (a|b)\, a + \|a\|^2\, b$, et $u(b) = f(b) = \|b\|^2\, a + (a|b)\, b$. Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = M = \begin{pmatrix} (a|b) & \|b\|^2 \\ \|a\|^2 & (a|b) \end{pmatrix} .$$

On calcule $\chi_u = \chi_M = \big(X - (a|b)\big)^2 - \|a\|^2\|b\|^2 = \big(X - (a|b) - \|a\|\|b\|\big)\big(X - (a|b) + \|a\|\|b\|\big)$. On obtient donc deux valeurs propres non nulles distinctes $\alpha = (a|b) - \|a\|\|b\|$ et $\beta = (a|b) + \|a\|\|b\|$. Elles sont non nulles car, a et b étant supposés non colinéaires, on n'est pas dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ici plus précisément $\alpha < 0$ et $\beta > 0$. Un petit calcul élémentaire, laissé à l'improbable lecteur, montre que $E_\alpha(u) = E_\alpha(f) = \mathrm{Vect}\big(\|b\|a - \|a\|b\big)$, et $E_\beta(f) = \mathrm{Vect}\big(\|b\|a + \|a\|b\big)$.

---

41. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que son rang est égal au nombre de valeurs propres non nulles (comptées avec leur ordre de multiplicité) de $A^\top A$.

- -

D'abord, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top A)$. En effet, on a facilement $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^\top A)$, mais on a aussi l'inclusion inverse: si $X \in \mathrm{Ker}(A^\top A)$, alors $A^\top AX = 0$, puis $X^\top A^\top AX = 0$, soit $(AX)^\top(AX) = 0$, donc $\|AX\|^2 = 0$, et enfin $AX = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^\top A)$, d'où

$$\mathrm{rg}(A) = n - \dim \mathrm{Ker}(A) = n - \dim \mathrm{Ker}(A^\top A) = \mathrm{rg}(A^\top A) .$$

Ensuite, $A^\top A$ est symétrique réelle, donc diagonalisable: si D est une matrice diagonale semblable à $A^\top A$, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top A) = \mathrm{rg}(D)$ est le nombre de coefficients non nuls sur la diagonale de D, c'est bien le nombre de valeurs propres non nulles (comptées avec leur multiplicité) de $A^\top A$.

---

42. Soit E un espace euclidien.

a. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique positif. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme r symétrique positif tel que $r^2 = u$.

b. Soient u et v des endomorphismes symétriques positifs de E. Démontrer les inégalités

$$0 \leq \mathrm{tr}(u \circ v) \leq (\mathrm{tr} u) \cdot (\mathrm{tr} v)\ .$$

- -

a. Montrons d'abord l'existence: on sait qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle u est représenté par une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, les valeurs propres λ_i (ici non nécessairement distinctes) étant positives ou nulles puisque u est autoadjoint positif. Soit r l'endomorphisme représenté dans la même base $\mathcal{B}$ par la matrice $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$, on a bien sûr $r^2 = u$ puisque $\Delta^2 = D$, et l'endomorphisme r est autoadjoint puisqu'il est représenté dans une base orthonormale par une matrice diagonale (donc symétrique!), et il est positif puisque ses valeurs propres sont les $\sqrt{\lambda_i}$.

Pour l'unicité, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ les valeurs propres (ici distinctes) de u, on sait que ce sont des réels positifs ou nuls, notons $E_i = E_{\lambda_i}(u)$ pour tout i. Considérons r endomorphisme symétrique positif tel que $r^2 = u$. Alors r et u commutent, donc les sous-espaces propres E_i de u sont stables par r, notons r_i l'endomorphisme de E_i induit par r. Alors r_i est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien E_i (muni de la restriction du produit scalaire de E), donc il est diagonalisable, mais si α est une valeur propre de r_i, si $x \in E_i$ est un vecteur propre associé, on a $r(x) = r_i(x) = \alpha x$, puis $u(x) = r^2(x) = \alpha^2 x$ donc $\alpha^2 = \lambda_i$ puisqu'on a aussi $u(x) = \lambda_i x$, donc $\alpha = \sqrt{\lambda_i}$ puisque l'on veut que les valeurs propres de r soient positives. Ceci montre que r_i est l'homothétie de rapport $\sqrt{\lambda_i}$ dans l'espace E_i (en effet, r_i est diagonalisable avec une seule valeur propre), autrement dit la restriction de r au sous-espace E_i est entièrement déterminée. Comme un endomorphisme de E est entièrement déterminé par la connaissance de ses restrictions aux sous-espaces E_i (ceci puisque E est la somme directe des E_i), on a bien prouvé l'unicité de la "racine carrée" symétrique positive de l'endomorphisme u.

b. *Rappelons que, si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale d'un espace euclidien E, si f est un endomorphisme de E, on a* $\mathrm{tr}(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(e_i | f(e_i)\big)$.

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale constituée de vecteurs propres de u : $u(e_i) = \lambda_i\, e_i$, avec $\lambda_i \geq 0$. Alors

$$\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u) = \sum_{i=1}^{n} \big(v(u(e_i)) \mid e_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \big(u(e_i) | v(e_i)\big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\ \big(e_i | v(e_i)\big)\ .$$

Comme v est positif, on a $\big(e_i | v(e_i)\big) \geq 0$ pour tout i, donc déjà $\mathrm{tr}(u \circ v) \geq 0$. Enfin,

$$\mathrm{tr}(u\circ v)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\big(v(e_i)|e_i\big)\leq\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Big)\,\Big(\sum_{j=1}^{n}\big(v(e_j)|e_j\big)\Big)=\mathrm{tr}(u)\cdot\mathrm{tr}(v)\ .$$

En effet, le second membre de l'inégalité ci-dessus comporte les mêmes termes que le premier membre, auxquels viennent s'ajouter des termes tous positifs, les $\lambda_i\,\big(v(e_j)|e_j\big)$ *avec* $i\neq j$.

---

43. Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, soient $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n$ ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité). Montrer que $\displaystyle\sum_{i,j}a_{i,j}^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$.

- -

Soit $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$. Par le théorème spectral, A est semblable à D (avec une matrice de passage orthogonale, mais ce n'est en fait pas utile), i.e. $A=PDP^{-1}$ avec $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En notant $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la norme associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ défini par

$$(A|B)=\mathrm{tr}(A^\top B)=\sum_{i,j}a_{i,j}b_{i,j}\ ,$$

on a

$$\sum_{i,j}a_{i,j}^2=\|A\|^2=\mathrm{tr}(A^\top A)=\mathrm{tr}(A^2)=\mathrm{tr}(D^2)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$$

puisque A^2 et D^2 sont semblables, et $D^2=\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\cdots,\lambda_n^2)$.

---

44. Soit E un espace euclidien, soit $u\in\mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique défini positif. Montrer l'inégalité

$$\forall x\in E\qquad \|x\|^4\leq\big(u(x)|x\big)\,\big(u^{-1}(x)|x\big)\ .$$

Déterminer les cas d'égalité.

- -

Pour $(x,y)\in E^2$, posons $<x,y>=\big(u(x)|y\big)$. Alors $<\cdot,\cdot>$ est un produit scalaire sur E.

En effet, la bilinéarité est immédiate. La symétrie résulte du fait que l'endomorphisme u est symétrique. Par ailleurs, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de u, notons $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n$ les valeurs propres respectivement associées (elles sont toutes strictement positives). Si $x=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ est un vecteur de E, on a

$$<x,x>=\big(u(x)|x\big)=\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_ie_i\big|\sum_{j=1}^{n}x_je_j\Big)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i^2\geq 0$$

et cette somme de termes positifs est nulle si et seulement si chaque terme $\lambda_ix_i^2$ est nul, ce qui entraîne que $x=0_E$, on a donc prouvé le caractère défini positif de $<\cdot,\cdot>$.

Il est par ailleurs immédiat que $u\in\mathrm{GL}(E)$, d'où l'existence de u^{-1}.

Il suffit alors d'écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce nouveau produit scalaire:

$$\forall x \in E \qquad \left\langle u^{-1}(x), x\right\rangle^2 \ \leq\ \left\langle u^{-1}(x), u^{-1}(x)\right\rangle \left\langle x, x\right\rangle\ ,$$

soit

$$\forall x \in E \qquad \|x\|^4 = \left(x|x\right)^2 \leq \left(x|u^{-1}(x)\right)\ \left(u(x)|x\right)\ ,$$

ce qui est l'inégalité demandée, avec égalité si et seulement si les vecteurs $u^{-1}(x)$ et x sont colinéaires, ce qui équivaut encore à la colinéarité des vecteurs x et $u(x)$, et donc au fait que x est un vecteur propre de u (ou est le vecteur nul).

---

45. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique réelle.

a. Montrer que A^2 est symétrique réelle et que $\mathrm{Sp}(A^2) \subset \mathbb{R}_-$.

b. On suppose A inversible. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, à valeurs propres imaginaires pures.

c. Montrer que $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$.

d.* En utilisant **c.**, montrer que le résultat du **b.** est vrai même si A n'est pas inversible.

- -

a. On a $(A^2)^\top = (A^\top)^2 = (-A)^2 = A^2$, donc A^2 est symétrique réelle. Les valeurs propres de A^2 sont donc toutes réelles. En notant $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$, si λ est une valeur propre de A^2 et $Y \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé, on a

$$\begin{aligned} \lambda\, \|Y\|^2 &= \ < \lambda Y, Y > = < A^2 Y, Y > = \ (A^2 Y)^\top Y \ = \ Y^\top A^\top A^\top Y \\ &= \ -Y^\top A^\top A Y \ = \ -(AY)^\top AY \ = \ - < AY, AY > = \ -\|AY\|^2 \ \leq 0\ , \end{aligned}$$

donc $\lambda \leq 0$.

b. Si A est inversible, alors A^2 l'est aussi, et ses valeurs propres sont alors des réels strictement négatifs, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ les valeurs propres (distinctes) de A^2. Comme A^2 est diagonalisable, elle admet pour polynôme annulateur $P = \displaystyle\prod_{\alpha \in \mathrm{Sp}(A^2)} (X - \alpha) = \prod_{k=1}^m (X - \lambda_k)$. On a ainsi, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la relation $P(A^2) = 0$, soit $Q(A) = 0$, en introduisant le polynôme Q défini par $Q(X) = P(X^2) = \displaystyle\prod_{k=1}^m (X^2 - \lambda_k) = \prod_{k=1}^m \big((X - i\sqrt{-\lambda_k})\ (X + i\sqrt{-\lambda_k})\big)$. Ce polynôme Q est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Enfin, on a $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathcal{Z}(Q)$, les valeurs propres de A sont donc imaginaires pures.

c. L'inclusion $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^2)$ est immédiate.

Si $Y \in \mathbb{R}^n$ appartient à $\mathrm{Ker}(A^2)$, on a $A^2 Y = 0$, donc $< A^2 Y, Y >= 0$, soit $\|AY\|^2 = 0$ (*cf.* calcul fait en **a.**), donc $Y \in \mathrm{Ker}(A)$. Finalement, $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$.

Notons toutefois une petite ambiguïté: s'agit-il des noyaux de A et A^2 considérées comme matrices réelles (ce sont alors des s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, et c'est ce qui a été prouvé ci-dessus) ou comme matrices complexes (ce sont alors des s.e.v. de $\mathbb{C}^n$, et c'est ce dont on aura besoin pour la question suivante) ? La réponse à cette question sera la même puisqu'on a toujours l'inclusion triviale $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^2)$ et que le rang d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est le même, qu'elle soit considérée comme matrice réelle ou comme matrice complexe.

d. Si A n'est pas inversible, alors elle admet 0 pour valeur propre et il en est de même pour A^2, et en notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes **non nulles** de A^2 (qui sont donc strictement négatives), le polynôme $P = X \displaystyle\prod_{k=1}^{m}(X - \lambda_k)$ annule A^2, donc le polynôme $Q = P(X^2) = X^2\, R(X)$ annule A, avec $R(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{m}(X^2 - \lambda_k)$. On a donc $Q(A) = A^2\, R(A) = 0$, soit $\mathrm{Im}\big(R(A)\big) \subset \mathrm{Ker}(A^2)$ et, de la question **c.**, on déduit que $\mathrm{Im}\big(R(A)\big) \subset \mathrm{Ker}(A)$, soit $A\, R(A) = 0$ et le polynôme XR annule A. Or, le polynôme $XR = X \displaystyle\prod_{k=1}^{m}\big((X - i\sqrt{-\lambda_k})\,(X + i\sqrt{-\lambda_k})\big)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, on déduit donc comme en **b.** que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, avec $\mathrm{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$.

46.a. Soit f un endomorphisme symétrique de E euclidien E. Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \big(\mathrm{Ker}(f)\big)^{\perp}$.

b. On suppose f symétrique positif. Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique positif h tel que $h^2 = f$.

c. Soient f et g deux endomorphismes symétriques positifs de E. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(f+g) = \mathrm{Ker}(f) \ \cap\ \mathrm{Ker}(g)\ .$$

d* Toujours avec f et g endomorphismes symétriques positifs, montrer que

$$\mathrm{Im}(f+g) = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)\ .$$

- -

a. Soient $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $t \in E$ tel que $y = f(t)$, donc

$$\big(x|y\big) = \big(x|f(t)\big) = \big(f(x)|t\big) = (0_E|t) = 0\ .$$

On a ainsi prouvé que $\mathrm{Im}(f) \subset \big(\mathrm{Ker}(f)\big)^{\perp}$. Le théorème du rang donne l'égalité des dimensions, puis la conclusion.

b. Par le théorème spectral, il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E constituée de vecteurs propres de f. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, les valeurs propres λ_i étant positives. Soit h l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$. Alors h est symétrique (car représenté dans une b.o.n. par une matrice diagonale, donc symétrique) et $h^2 = f$.

c. L'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \ \cap\ \mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f+g)$ est triviale. Montrons l'autre!

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f+g)$, alors $f(x) + g(x) = 0_E$, donc $\big((f+g)(x)|x\big) = \big(f(x)|x\big) + \big(g(x)|x\big) = 0$. C'est une somme de termes positifs, donc chaque terme est nul: $\big(f(x)|x\big) = \big(g(x)|x\big) = 0$. Si on appelle h un endomorphisme symétrique tel que $h^2 = f$ (question **b.**), on a alors $0 = \big(f(x)|x\big) = \big\|h(x)\big\|^2 = 0$, donc $h(x) = 0_E$ puis $f(x) = 0_E$ et $x \in \mathrm{Ker}(f)$. De même, $x \in \mathrm{Ker}(g)$.

d. L'endomorphisme $f+g$ est symétrique, on a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f+g) &= \big(\mathrm{Ker}(f+g)\big)^{\perp} = \big(\mathrm{Ker}(f)\ \cap\ \mathrm{Ker}(g)\big)^{\perp} \\ &= (\mathrm{Ker}\, f)^{\perp} + (\mathrm{Ker}\, g)^{\perp} = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)\ . \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que, si V et W sont deux sous-espaces d'un espace euclidien E, on a $(V\ \cap\ W)^{\perp} = V^{\perp} + W^{\perp}$. En effet, il est facile de prouver que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp}\ \cap\ G^{\perp}$ (ceci est vrai plus généralement dans un espace préhilbertien). En dimension finie, on a, de plus, $\big(F^{\perp}\big) = F$, donc $V\ \cap\ W = \big(V^{\perp}\big)^{\perp}\ \cap\ \big(W^{\perp}\big)^{\perp} = \big(V^{\perp} + W^{\perp}\big)^{\perp}$, puis

$$(V\ \cap\ W)^{\perp} = \Big(\big(V^{\perp} + W^{\perp}\big)^{\perp}\Big)^{\perp} = V^{\perp} + W^{\perp}\ .$$

Variante: L'inclusion $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ est facile.

Soit maintenant $y \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$, on a donc $y = u + v$ avec $u \in \mathrm{Im}(f) = (\mathrm{Ker}\, f)^{\perp}$ et $v \in \mathrm{Im}(g) \in (\mathrm{Ker}\, g)^{\perp}$ en utilisant **a.** Soit alors $x \in \mathrm{Ker}(f+g)$, on a donc $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$ d'après **c.**, puis $(y|x) = (u|x) + (v|x)$ et chacun des deux termes est nul. On a ainsi prouvé que $y \in \big(\mathrm{Ker}(f+g)\big)^{\perp}$, soit $y \in \mathrm{Im}(f+g)$ d'après **a.** (l'endomorphisme $f+g$ étant lui aussi symétrique). Cela prouve donc $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(f+g)$.

---

47. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ une matrice antisymétrique.

a. Montrer que, pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathrm{I\!R})$, on a $X^{\top}AX = 0$.

b. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathrm{I\!R})$. Montrer que la matrice $M = A + S$ est inversible.

- -

a. L'expression $X^{\top}AX$ est un scalaire, elle est donc égale à sa transposée. Sachant que $A^{\top} = -A$, on obtient

$$X^{\top}AX = (X^{\top}AX)^{\top} = X^{\top}A^{\top}X = -X^{\top}AX\ ,$$

donc $X^{\top}AX = 0$.

b. Si S est une matrice symétrique définie positive, on a $X^{\top}SX > 0$ pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathrm{I\!R})$ **non nul**.

Maintenant, si X est un vecteur **non nul**, on a $X^{\top}MX = X^{\top}AX + X^{\top}SX = X^{\top}SX > 0$, ce qui entraîne $MX \neq 0$. Ainsi on vient de montrer que $\mathrm{Ker}(M) = \{0\}$, la matrice $M = A+S$ est donc inversible.

48.a. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont positifs ou nuls. Montrer que

$$\forall V \in \mathrm{O}_n(\mathrm{I\!R}) \qquad \mathrm{tr}(DV) \leq \mathrm{tr}(D)\ .$$

b. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathrm{I\!R})$ une matrice symétrique positive. Montrer que

$$\forall U \in \mathrm{O}_n(\mathrm{I\!R}) \qquad \mathrm{tr}(AU) \leq \mathrm{tr}(A)\ .$$

- -

a. Notons $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, les λ_i étant positifs. Posons $V = (v_{i,j})_{i,j}$ et $DV = (w_{i,j})_{i,j}$. On a alors $w_{i,j} = \lambda_i \, v_{i,j}$ (multiplier V à gauche par la matrice diagonale D revient à multiplier, pour tout i, la i-ème ligne de V par le coefficient λ_i). La matrice V étant orthogonale, ses coeeficients sont majorés par 1 en valeur absolue (par exemple parce que chaque colonne de V est un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$). Donc, les coefficients λ_i étant positifs,

$$\mathrm{tr}(DV) = \sum_{i=1}^{n} w_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_{i,i} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, |v_{i,i}| \leq \sum_{i=1} \lambda_i = \mathrm{tr}(D) \; .$$

b. D'après le théorème spectral, A est diagonalisable et $A = PDP^{-1} = PDP^{\top}$, avec $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale à coefficients diagonaux positifs. Alors, en utilisant **a.**,

$$\mathrm{tr}(AU) = \mathrm{tr}(PDP^{\top}U) = \mathrm{tr}(DP^{\top}UP) = \mathrm{tr}(DV) \leq \mathrm{tr}(D) = \mathrm{tr}(A)$$

en posant $V = P^{\top}UP \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ car c'est un produit de matrices orthogonales, la dernière égalité est vraie car les matrices A et D sont semblables.