DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 8

PSI2 2024-2025 **à rendre le jeudi 13/02/2025**

EXERCICE

PARTIE A.

Dans cette partie, E est un espace euclidien dont le produit scalaire est noté $(\cdot \mid \cdot)$, et u est un endomorphisme autoadjoint de E.

A.1. Montrer que u est positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.

A.2. Montrer que u est défini positif si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$.

A.3. On suppose u positif. On suppose qu'il existe un endomorphisme v, autoadjoint positif lui aussi, tel que $v^2 = u$. Soit λ une valeur propre de u. Montrer que le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est stable par v. En déduire que $E_\lambda(u) = E_{\sqrt{\lambda}}(v)$.

A.4. On suppose u positif. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme v, autoadjoint positif, tel que $v^2 = u$. On notera $v = \sqrt{u}$.

A.5. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une unique matrice $T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, symétrique positive, telle que $T^2 = S$. On notera $T = \sqrt{S}$.

PARTIE B.

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive, soit $T = \sqrt{S}$. On note s et t les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés aux matrices S et T. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de S, rangées dans l'ordre croissant, on a ainsi

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n .$$

On supposera l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $(\cdot \mid \cdot)$, et de la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$.

B.1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\big(t(x) \big| t^{-1}(x)\big) = \|x\|^2$. Montrer l'inégalité

$$\textbf{(1)} : \qquad \Big(t(x) \Big| t^{-1}(x)\Big)^2 \leq \big(s(x)|x\big) \Big(s^{-1}(x)\Big|x\Big) .$$

À quelle condition sur x a-t-on égalité ?

B.2. On considère le polynôme $P = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)\, X + \lambda_1\, \lambda_n \in \mathbb{R}[X]$. Déterminer le signe de $P(\lambda_i)$, pour $i \in [\![1, n]\!]$.

B.3. Soit f l'endomomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $f = -P(s) \circ s^{-1}$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de s associé à la valeur propre λ_i. Calculer $f(x)$. En déduire que l'endomorphisme f est autoadjoint positif.

B.4. Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. On considère le polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ donné par

$$Q = \big(s(x)|x\big)\, X^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)\, \|x\|^2\, X + \big(s^{-1}(x)|x\big)\, \lambda_1 \lambda_n .$$

Déterminer le signe de $Q(0)$ et de $Q(1)$. En déduire l'inégalité

$$\textbf{(2)} : \qquad \big(s(x)|x\big) \Big(s^{-1}(x)\Big|x\Big) \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n}\, \|x\|^4 .$$

B.5. On suppose que s n'est pas une homothétie. Soient v_1 et v_n des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ tels que $s(v_1) = \lambda_1 v_1$ et $s(v_n) = \lambda_n v_n$, soit enfin $x = v_1 + v_n$. Calculer les produits scalaires $\big(s(x)|x\big)$ et $\Big(s^{-1}(x)\Big|x\Big)$. Montrer que le vecteur x vérifie l'égalité dans l'inégalité **(2)**.

PROBLÈME

PARTIE A. Lemme de Borel-Cantelli et applications.

On considère une suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On introduit alors les "événements" suivants:

E_n : "aucun des événements A_k, pour $k \in [\![1, n]\!]$, n'est réalisé" (pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné) ;

E : "aucun des événements A_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, n'est réalisé" ;

F: "une infinité d'événements A_n se réalise".

1. Exprimer E_n $(n \in \mathbb{N}^*)$, E et F en fonction des A_k, $k \in \mathbb{N}^*$, en utilisant des réunions, intersections et complémentaires (événements contraires). En déduire que ce sont bien des événements.

2. Dans cette question, on suppose que la série $\sum P(A_n)$ converge.

a. Soit, pour tout n entier, l'événement $B_n = \displaystyle\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 0$.

b. En déduire que l'événement F est négligeable.

3. On considère que deux joueurs A et B s'affrontent dans une suite infinie de parties indépendantes, et qu'à chacune de ces parties, le joueur A a une probabilité p de gagner (avec $p \in]0, 1[$), et bien sûr le joueur B a une probabilité $q = 1 - p$ de gagner. Chaque joueur marque un point pour une partie remportée.

a. Pour tout n non nul, soit l'événement C_n: "le joueur A remporte les parties dont les numéros sont n, $n + 1$, $\cdots$, $2n - 1$". Montrer qu'il est presque sûr qu'un nombre fini seulement de ces événements C_n se réalise.

b. Pour tout n, on introduit l'événement D_n: "lors des $2n$ premières parties, chaque joueur en a remporté n exactement".

i) Calculer $P(D_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

ii) Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $\dbinom{2n}{n} \leq 4^n$.

iii) En déduire que, si $p \neq \dfrac{1}{2}$, la série $\sum P(D_n)$ converge. Montrer alors qu'il est presque sûr qu'il existe un rang à partir duquel les deux joueurs n'égaliseront plus.

PARTIE B. Un produit eulérien.

On rappelle une propriété d'arithmétique: si q_1, $\cdots$, q_k sont des nombres premiers distincts, alors un entier n est divisible par le produit $\displaystyle\prod_{i=1}^{k} q_i$ si et seulement s'il est divisible par chacun des q_i.

On rappelle aussi que, si A_1, $\cdots$, A_k sont des événements (mutuellement) indépendants, il en est alors de même de leurs complémentaires $\overline{A_1}$, $\cdots$, $\overline{A_k}$.

Pour tout réel x tel que $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ (**fonction zéta de Riemann**).

On considère une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suit la **loi zéta de paramètre** x, c'est-à-dire telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(X = n) = \frac{1}{n^x \, \zeta(x)} \ .$$

4. Vérifier la cohérence de cette définition.

5. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de l'événement $\{a \mid X\} = \big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in a\,\mathbb{N}^*\big\}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le n-ième nombre premier, ainsi $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\cdots$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements $\{p_k \mid X\}$, $1 \leq k \leq n$, sont indépendants.

7. Montrer que $\{X = 1\} = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{\{p_k \mid X\}}$.

8. En déduire la relation $\dfrac{1}{\zeta(x)} = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)$.

PARTIE C. La série des inverses des nombres premiers.

On note toujours p_k le k-ième nombre premier ($k \in \mathbb{N}^*$). L'objectif de cette partie est de montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{p_k}$ est divergente.

9. Montrer qu'il suffit de prouver la divergence de la série de terme général $u_k = -\ln\left(1 - \dfrac{1}{p_k}\right)$.

10. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \zeta(x) = +\infty$.

11. Dans cette question, on suppose que la série $\displaystyle\sum_{k \geq 1} u_k$ converge, et on note S sa somme.

a. Montrer que, pour tout $x > 1$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left(-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)\right) \leq S$.

b. En utilisant le résultat de la question **8.**, montrer que $\forall x > 1 \quad \ln\big(\zeta(x)\big) \leq S$.

c. Conclure cette étude.