CORRIGÉ du D.M. de MATHÉMATIQUES numéro 7
PSI2 2024-2025

EXERCICE

1.a. Si le polynôme PQ est non nul, soit $a_d X^d$ son terme dominant avec $d \in \mathbb{N}$ et $a_d \in \mathbb{R}^*$, on a alors
$$t^2\, P(t)\, Q(t)\, e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\sim} a_d\, t^{d+2}\, e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
par croissances comparées, donc $P(t)\, Q(t)\, e^{-t} = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ lorsque $t \to +\infty$, ce qui garantit l'intégrabilité de cette fonction continue sur $[0, +\infty[$.

b. La bilinéarité et la symétrie sont évidentes, et on a $(P|P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)^2\, e^{-t}\, \mathrm{d}t \geq 0$. Comme la fonction $t \mapsto P(t)^2\, e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, on déduit du théorème de stricte positivité que $(P|P)$ est nul si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad P(t)^2\, e^{-t} = 0$, ce qui entraîne que $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad P(t) = 0$, ce qui entraîne enfin que le polynôme P admet une infinité de racines, donc est le polynôme nul. On a obtenu le caractère défini positif.

c. Posons $I_k = (X^k|1)$ pour tout k entier naturel. Alors $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$. On a $I_0 = 1$, et une intégration par parties donne la relation $I_k = k\, I_{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit facilement que
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad I_k = (X^k|1) = k!$$

2.a. La linéarité de φ résulte de la linéarité de la dérivation. De plus, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors les polynômes XP'' et $(1-X)P'$ sont de degré au plus n, donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$, on a donc un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

b. On calcule $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = 1 - X$ et, pour $k \geq 2$, $\varphi(X^k) = k^2\, X^{k-1} - k\, X^k$, cela permet de construire la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\varphi)$ avec $\mathcal{B}_0 = (1, X, \cdots, X^n)$ base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$:
$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & -1 & 4 & & (0) & \\ & & -2 & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & & \ddots & n^2 \\ & & & & & -n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \;.$$

c. Cette matrice est triangulaire supérieure avec pour coefficients diagonaux $0, -1, -2, \cdots, -n$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{0, -1, -2, \cdots, -n\} = \big\{-k\ ;\ 0 \leq k \leq n\big\}$.

Donc φ, qui est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n+1$, admet $n+1$ valeurs propres distinctes, il est donc diagonalisable.

3.a. De ce qui précède, on déduit que les sous-espaces propres de φ, c'est-à-dire les
$$V_k = E_{-k}(\varphi) = \mathrm{Ker}\left(\varphi + k\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right),\ 0 \leq k \leq n\ ,$$
sont tous des droites vectorielles.

b. Si Q_k est un polynôme non nul appartenant à V_k, notons c son coefficient dominant. Alors $V_k = \mathrm{Vect}(Q_k) = \{\lambda Q_k\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Le seul polynôme unitaire (i.e. de coeffcient dominant égal à 1) appartenant à la droite vectorielle V_k est le polynôme $P_k = \dfrac{1}{c}\, Q_k$.

c. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le sous-espace $E_k = \mathbb{R}_k[X]$ est stable par φ, notons φ_k l'endomorphisme induit. La matrice de φ_k dans la base canonique $(1, X, \cdots, X^k)$ de E_k est triangulaire supérieure avec pour coefficients diagonaux $0, -1, \cdots, -k$, donc $\mathrm{Sp}(\varphi_k) = \{0, -1, \cdots, -k\}$. Pour $k \geq 1$, le nombre $-k$ n'est pas valeur propre de φ_{k-1} donc $P_k \notin \mathbb{R}_{k-1}[X]$, et il est valeur propre de φ_k donc $P_k \in \mathbb{R}_k[X]$. Finalement, P_k est de degré k exactement. Enfin, on a clairement $P_0 = 1$ donc $\deg(P_0) = 0$.

Cherchons P_1 sous la forme $P_1 = X + a$ avec a réel. On a alors $\varphi(P_1) = \varphi(X) = -X + 1$, la relation $\varphi(P_1) = -P_1$ est satisfaite si et seulement si $a = -1$, donc $P_1 = X - 1$.

Cherchons P_2 sous la forme $P_2 = X^2 + aX + b$ avec a et b réels. On a alors

$$\varphi(P_2) = -2X^2 + (4-a)X + a\ ,$$

la relation $\varphi(P_2) = -2P_2$ est satisfaite si et seulement si $\begin{cases} 4-a &= -2a \\ a &= -2b \end{cases}$, on déduit $a = -4$ et $b = 2$, donc $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

4.a. On obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(t\,P'(t)\,e^{-t}\big) = P'(t)\,e^{-t} + t\,P''(t)\,e^{-t} - t\,P'(t)\,e^{-t} = \big(t\,P''(t) + (1-t)\,P'(t)\big)\,e^{-t}\ ,$$

soit $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(t\,P'(t)\,e^{-t}\big) = \varphi(P)(t)\cdot e^{-t}$. Donc, par une intégration par parties,

$$\begin{aligned}
\big(\varphi(P)|Q\big) &= \int_0^{+\infty} \varphi(P)(t)\cdot Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(t\,P'(t)\,e^{-t}\big)\cdot Q(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \big[t\,P'(t)\,Q(t)\,e^{-t}\big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} t\,P'(t)\,Q'(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{+\infty} t\,P'(t)\,Q'(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

(le terme entre crochets est nul). On obtient donc une expression symétrique en P et Q, autrement dit le développement de $\big(\varphi(Q)|P\big) = \big(P|\varphi(Q)\big)$ conduirait au même résultat. On a donc prouvé la relation $\big(\varphi(P)|Q\big) = \big(P|\varphi(Q)\big)$, donc φ est ce que l'on appelle un **endomorphisme symétrique** (ou **autoadjoint**) de l'espace euclidien $E_n = \mathbb{R}_n[X]$, muni de la restriction du produit scalaire de $E = \mathbb{R}[X]$.

b. Si k et l sont deux entiers distincts dans l'intervalle $[\![0, n]\!]$, alors

$$\big(\varphi(P_k)|P_l\big) = (-k\,P_k|P_l) = -k\,(P_k|P_l)\ ,\ \text{mézôssi}\ \big(\varphi(P_k)|P_l\big) = \big(P_k|\varphi(P_l)\big) = -l\,(P_k|P_l)\ .$$

On a donc $(k-l)\,(P_k|P_l) = 0$, avec $k \neq l$, donc $(P_k|P_l) = 0$. La famille $(P_0, \cdots, P_n)$ est donc orthogonale. Comme elle est constituée de polynômes non nuls (ou encore comme elle est à degrés échelonnés), elle est libre. Comme elle est de cardinal $n+1$, c'est une base orthogonale de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

5.a. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} P_n(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = (P_0|P_n) = 0$ puisque la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

b. Si la fonction polynomiale P_n n'admettait aucune racine, ou bien seulement des racines de multiplicité paire, dans $]0, +\infty[$, elle garderait un signe constant sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $t \mapsto P_n(t)\,e^{-t}$ serait alors continue et de signe constant sur $\mathbb{R}_+$, la nullité de son intégrale entraînerait alors que c'est la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$ (théorème de stricte positivité). Le polynôme P_n aurait alors une infinité de racines, et serait donc le polynôme nul, ce qui est absurde. Donc P_n admet au moins une racine d'ordre impair dans $\mathbb{R}_+^*$, pour $n \geq 1$.

c. Il est clair que $r \leq n = \deg(P_n)$. Si l'inégalité était stricte, on aurait $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $(P_n|Q) = 0$ puisque le polynôme P_n appartient à $\big(\{P_0, \cdots, P_{n-1}\}\big)^\perp = \big(\mathbb{R}_{n-1}[X]\big)^\perp$. Mais $(P_n|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P_n(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$, et l'intégrande est continu et de signe constant sur $\mathbb{R}_+$ puisque le polynôme P_nQ ne peut avoir que des racines d'ordre pair dans $\mathbb{R}_+^*$, donc $P_nQ = 0$ (toujours théorème de stricte positivité, puis polynôme ayant une infinité de racines), puis $Q = 0$ ce qui est absurde. On a donc $r = n$, ce qui signifie que le polynôme P_n est scindé à racines simples, toutes ses racines étant dans $\mathbb{R}_+^*$.

6.a. Pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, posons $\alpha(P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ et $\beta(P) = \displaystyle\sum_{j=1}^n \lambda_j\, P(x_j)$. Les applications α et β sont des formes linéaires sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Elles sont égales si et seulement si elles coïncident sur tous les vecteurs d'une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc si et seulement si on a $\beta(X^i) = \alpha(X^i)$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$. Écrivons alors les n équations obtenues:

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad \sum_{j=1}^n x_j^i\, \lambda_j = \int_0^{+\infty} t^i\, e^{-t}\, \mathrm{d}t \ , \text{ soit } \qquad \forall i \in [\![0, n-1]\!] \qquad \sum_{j=1}^n x_j^i\, \lambda_j = i!$$

Les scalaires $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont alors déterminés par un système linéaire d'écriture matricielle $V\,\Lambda = Y$, en posant

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \ , \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix} .$$

On reconnaît en la matrice V une matrice de Vandermonde, de déterminant non nul puisque les x_i sont deux à deux distincts, donc V est inversible et le système est un système de Cramer, il a une solution unique $\Lambda = V^{-1}Y$.

b. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les coefficients déterminés dans la question **a.**, on a donc la relation **(*)** satisfaite pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

On notera toujours $\alpha(P)$ et $\beta(P)$ le premier membre et le second membre de la relation **(*)** pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$. Ainsi, α et β sont clairement des formes linéaires sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

Soit maintenant $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on peut écrire $P = P_nQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(P_n) = n$, soit $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a aussi $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Par linéarité, $\alpha(P) = \alpha(P_nQ) + \alpha(R)$, mais

$$\alpha(P_nQ) = \int_0^{+\infty} P_n(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = (P_n|Q) = 0$$

car le polynôme P_n est orthogonal à chacun des polynômes $P_0, \cdots, P_{n-1}$, donc il est orthogonal à $\mathrm{Vect}(P_0, \cdots, P_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc à Q. Donc $\alpha(P) = \alpha(R)$.

Par linéarité toujours, $\beta(P) = \beta(P_nQ) + \beta(R)$, mais $\beta(P_nQ) = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i\, P_n(x_i)\, Q(x_i) = 0$ puisque les x_i sont racines du polynôme P_n. Ainsi, $\beta(P) = \beta(R)$.

Enfin, comme $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $\alpha(R) = \beta(R)$. On en déduit que $\alpha(P) = \beta(P)$.

c. Le polynôme $P=\prod_{k=1}^{n}(X-x_k)^2$ admet les x_i comme racines, donc $\beta(P)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,P(x_i)=0$.
Mais en fait $P=P_n^2$. En effet, le polynôme P_n est unitaire de degré n et de racines distinctes $x_1,\cdots,x_n$, donc $P_n=\prod_{k=1}^{n}(X-x_k)$. Donc $\alpha(P)=\int_0^{+\infty}P_n(t)^2e^{-t}\mathrm{d}t=(P_n|P_n)>0$ puisque P_n n'est pas le polynôme nul, donc $\alpha(P)\neq\beta(P)$.
Avec le choix des λ_i, $1\le i\le n$, tels que déterminés dans la question **6.a.**, la relation **(*)** est donc vraie pour tout polynôme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, mais pas pour tout polynôme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

PROBLÈME

d'après Centrale-Supélec, 2009, filière PC

PARTIE A. Séries factorielles (*c'est leur vrai nom*).

1.a. On obtient $\dfrac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}=\dfrac{n}{x+n}\,\dfrac{(n+1)^x}{n^x}=\Big(1+\dfrac{x}{n}\Big)^{-1}\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^x$, donc

$$\ln\Big(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\Big)=x\,\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)-\ln\Big(1+\frac{x}{n}\Big)\,.$$

On développe (*en utilisant des "grand O" pour plus d'économie*):

$$\ln\Big(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\Big)=x\left(\frac{1}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)-\left(\frac{x}{n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)=O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\,.$$

Par les critères de comparaison de séries à termes positifs, on déduit que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)}\right)$ est absolument convergente, donc convergente.

b. La série étudiée ci-dessus est télescopique puisque son terme général s'écrit aussi $\ln\big(w_n(x)\big)-\ln\big(w_{n-1}(x)\big)$. On en déduit la convergence de la suite de terme général $\ln\big(w_n(x)\big)$.
En posant $\alpha(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\big(w_n(x)\big)$, par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n(x)=e^{\alpha(x)}$, réel strictement positif qui sera noté $l(x)$.

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on a $\big|a_n\,u_n(x)\big|=\big|a_n\,v_n(x)\big|\,w_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}l(x)\,\big|a_n\,v_n(x)\big|$.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $a_nu_n(x)$ converge absolument si et seulement si la série de terme général $a_nv_n(x)$ converge absolument.

3.a. La suite (a_n) avec $a_n=\dfrac{1}{n+1}$ appartient à $\mathcal{A}$ puisque, si $x>0$, la série de terme général $a_nv_n(x)=\dfrac{1}{(n+1)^{x+1}}$ (série de Riemann) est (absolument) convergente.

b La suite constante $a_n=1$ n'appartient pas à $\mathcal{A}$ puisque la série de terme général $a_nv_n(x)=\dfrac{1}{(n+1)^x}$ ne converge (absolument) que pour $x>1$, et donc pas pour tout x strictement positif.

4.a. Posons $g_n(x) = a_n u_n(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Les fonctions g_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $S = [\alpha, \beta]$ est un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, les fonctions u_n étant manifestement positives et décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut écrire

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in S \qquad \big|g_n(x)\big| = |a_n|\, u_n(x) \leq |a_n|\, u_n(\alpha) = \big|g_n(\alpha)\big| ,$$

la série de terme général $\big|g_n(\alpha)\big|$ étant convergente puisque $a \in \mathcal{A}$. On a ainsi prouvé la convergence normale sur S de la série de fonctions $\sum g_n$. *En effet, on a prouvé que* $\|g_n\|_{\infty,S} = \big|g_n(\alpha)\big|$ *est le terme général d'une série convergente.* Cela entraîne la continuité de f_a sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Les arguments de la question **a.** ci-dessus montrent en fait que la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur $[\alpha, +\infty[$ pour tout $\alpha > 0$ (*la borne supérieure β du segment S n'a pas été utilisée dans les majorations*). Comme chaque fonction g_n tend vers 0 en $+\infty$, le théorème d'interversion limite-somme montre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0.$

PARTIE B. Représentation intégrale.

5.a. Montrons que la famille est libre: si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$ avec $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ réels, on a alors, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, **(*):** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(-i) = 0$. Or, pour tout k, le polynôme P_k admet pour racines les entiers négatifs $-i$ avec $0 \leq i \leq n$ et $i \neq k$, on a donc $P_k(-i) = 0$ pour $k \neq i$, et $P_i(-i) \neq 0$. Dans la relation **(*)**, il reste donc $\lambda_i\, P_i(-i) = 0$ et, comme $P_i(-i)$ est non nul, λ_i est nul. Cela prouve la liberté de la famille $(P_0, \cdots, P_n)$. Comme son cardinal est égal à la dimension $n+1$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, c'est donc une base de cet espace.

Remarque. Ces polynômes sont très proches des **polynômes de Lagrange** associés aux points d'interpolation $-i$, avec $0 \leq i \leq n$.

b. Le polynôme constant de valeur $n!$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, donc se décompose dans la base $(P_0, \cdots, P_n)$: il existe des réels $\alpha_0, \cdots, \alpha_n$ (uniques) tels que **(**):** $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$. Pour tout $x > 0$, on a alors

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, \frac{P_k(x)}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{x+k} .$$

Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Pour expliciter le coefficient α_i, évaluons au point $-i$ la relation **(**)**:

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k(-i) = \alpha_i\, P_i(-i) .$$

Or,

$$P_i(-i) = \prod_{0\leq k\leq n\ ,\ k\neq i} (k-i) = (-i)(-i+1)\cdots(-1)\times 1\times\cdots(n-i-1)(n-i) = (-1)^i\, i!(n-i)!$$

On en déduit que $\alpha_i = (-1)^i \dfrac{n!}{i!(n-i)!} = (-1)^i \dbinom{n}{i}$, soit $\forall k \in [\![0, n]\!] \quad \alpha_k = (-1)^k \dbinom{n}{k}$.

6. La fonction $y \mapsto (1-y)^{x-1+k}$ est continue sur $[0,1[$ (attention, si $k=0$ et $x<1$, elle n'est pas prolongeable par continuité au point 1). Le changement de variable (de classe $\mathcal{C}^1$, bijectif de $[0,1[$ vers $]0,1]$, et strictement décroissant) $t=1-y$ transforme l'intégrale en $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1+k}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x-k}}$, qui est bien convergente puisque $1-x-k<1$, et on a

$$\int_0^1 (1-y)^{x-1+k}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x-k}} = \left[\frac{t^{x+k}}{x+k}\right]_0^1 = \frac{1}{x+k}\ .$$

7. Par le changement de variable $t=1-y$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-y)^{x-1}\,y^n\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^n\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^1 t^{x-1}\,\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k t^k\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\,\frac{1}{x+k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{x+k} \;=\; \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \;=\; u_n(x)
\end{aligned}$$

en utilisant **5.b.**

Remarques. La convergence de l'intégrale proposée s'obtient comme dans la question **7.** ci-dessus. Rappelons aussi qu'il n'y a pas de difficulté pour intervertir une intégrale et une somme **finie**.

Il n'y a plus qu'à reporter dans l'expression de $f_a(x)$ donnée en **4.b.** pour obtenir, si $a\in\mathcal{A}$,

$$\forall x>0 \qquad f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,\int_0^1 (1-y)^{x-1}\,y^n\,\mathrm{d}y\ .$$

8.a. Si $a\in\mathcal{A}$, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0}|a_n|\,v_n(1) = \sum_{n\geq 0}\frac{|a_n|}{n+1}$ converge, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_n|}{n+1}=0$, on a donc $a_n=o(n)$. Par comparaison (avec la série entière $\sum ny^n$ qui est de rayon de convergence 1 comme on peut le voir en utilisant la règle de d'Alembert), on peut dire que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n y^n$ est au moins égal à 1.

b. Il faut bien sûr intervertir somme et intégrale dans la relation obtenue question **7.**

Soit $x>0$ fixé. Pour $y\in[0,1[$ et $n\in\mathbb{N}$, posons $\theta_n(y)=a_n y^n(1-y)^{x-1}$.

- Chaque fonction θ_n est continue et intégrable (*cf.* question **7.**) sur $[0,1[$.

- La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\theta_n$ converge simplement sur $[0,1[$ d'après **8.a.**, et a pour somme la fonction $y\mapsto(1-y)^{x-1}\,\varphi_a(y)$, continue sur $[0,1[$ car somme d'une série entière dans son intervalle de convergence.

- On a $\displaystyle\int_0^1 \big|\theta_n(y)\big|\,\mathrm{d}y = |a_n|\,u_n(x)$, terme général d'une série convergente puisque $a\in\mathcal{A}$.

L'interversion est donc légitime et donne la relation (et l'intégrabilité de l'intégrande)

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f_a(x) = \int_0^1 (1-y)^{x-1}\, \varphi_a(y)\, \mathrm{d}y\ .$$

9. Pour tout $x > 0$, on a (pour $n \geq 1$) $a_n v_n(x) = \dfrac{1}{n(n+1)^x} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{x+1}}$, qui est le terme général d'une série absolument convergente, donc $a \in \mathcal{A}$. Pour $y \in]-1,1[$, on a alors

$$\varphi_a(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n} = -\ln(1-y)$$

(développement en série entière usuel). Puis,pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} f_a(x) &= -\int_0^1 (1-y)^{x-1}\, \ln(1-y)\, \mathrm{d}y \ = \ -\int_0^1 t^{x-1}\, \ln(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x}\int_0^1 t^{x-1}\, \mathrm{d}t \ = \ \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

(changement de variable $y = 1-t$, puis intégration par parties).

PARTIE C. Dérivation d'une série factorielle.

10.a. Il s'agit de dériver une intégrale à paramètre. Posons $g(x,y) = (1-y)^{x-1}\, \varphi_a(y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,1[$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, l'application partielle $y \mapsto g(x,y)$ est continue et intégrable sur $[0,1[$ d'après **8.b.** Pour $y \in [0,1[$ fixé, $x \mapsto g(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = (1-y)^{x-1}\, \varphi_a(y)\, \ln(1-y)$, expression continue (par morceaux) par rapport à y, et on recherche une domination.

Or, si $S = [\alpha, \beta]$ est un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, pour $(x,y) \in S \times [0,1[$, on a

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right| \leq \psi(y)\ , \quad \text{avec} \quad \psi(y) = (1-y)^{\alpha-1}\, \big|\varphi_a(y)\big| \cdot \big|\ln(1-y)\big|\ .$$

Si γ est un réel tel que $0 < \gamma < \alpha$, alors

$$\frac{(1-y)^{\alpha-1}\, \big|\ln(1-y)\big|}{(1-y)^{\gamma-1}} = (1-y)^{\alpha-\gamma}\, \big|\ln(1-y)\big| \underset{y\to1^-}{\longrightarrow} 0$$

(par croissances comparées des fonctions puissances et logarithmes au voisinage de 0), donc $\psi(y) = o\big((1-y)^{\gamma-1}\, \varphi_a(y)\big)$ au voisinage de 1, ce qui garantit son intégrabilité sur $[0,1[$. Le théorème de dérivation s'applique donc et donne le caractère $\mathcal{C}^1$ de f_a et la relation

$$\forall x > 0 \qquad f_a'(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\, \mathrm{d}y = \int_0^1 (1-y)^{x-1}\, \varphi_a(y)\, \ln(1-y)\, \mathrm{d}y\ .$$

b. C'est un produit de deux fonctions développables en série entière sur $]-1,1[$, elle est donc aussi DSE sur cet intervalle par produit de Cauchy.

c. Le développement du produit de Cauchy donne, pour $y \in]-1,1[$,

$$\psi_a(y) = \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p y^p\Big)\ \Big(-\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{y^q}{q}\Big) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{p+q=n\ ,\ q\geq 1} \frac{a_p}{q}\Big) y^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n y^n$$

avec $b_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = -\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \frac{a_p}{n-p}$.

11. On a $|b_n| \leq \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \frac{|a_p|}{n-p}$ pour $n \geq 1$, donc (par une interversion de sommes finies)

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|b_n|}{(n+1)^x} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^x} \left(\sum_{p=0}^{n-1} \frac{|a_p|}{n-p} \right) = \sum_{p=0}^{N-1} \left(\sum_{n=p+1}^{N} \frac{|a_p|}{(n+1)^x (n-p)} \right) .$$

Le changement d'indice $k = n - p$ dans la somme intérieure donne la majoration voulue.

12. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\,(t+p+1)^x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Une classique comparaison série-intégrale donne alors $\dfrac{1}{k(k+p+1)^x} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(t+p+1)^x}$ pour $k \geq 2$. On somme ces inégalités pour k allant de 2 à $N-p$, on rajoute le terme pour $k = 1$ (en constatant que $\dfrac{1}{(p+2)^x} \leq \dfrac{1}{(p+1)^x}$), on majore l'intégrale sur $[1, N-p]$ par l'intégrale (convergente) sur $[1, +\infty[$ ... et on assaisonne avant de servir.

13. On découpe l'intégrale obtenue dans la majoration précédente, puis on majore chaque morceau:

$$\int_1^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(t+p+1)^x} \leq \int_1^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(p+1)^x} = \frac{\ln(p+1)}{(p+1)^x} .$$

$$\int_{p+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,(t+p+1)^x} \leq \int_{p+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t \cdot t^x} = \frac{1}{x\,(p+1)^x} .$$

On rajoute enfin le terme $\dfrac{1}{(p+1)^x}$.

14. On a finalement obtenu, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la majoration

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|b_n|}{(n+1)^x} \leq \sum_{p=0}^{N-1} \frac{|a_p|\,\ln(p+1)}{(p+1)^x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \sum_{p=0}^{N-1} \frac{|a_p|}{(p+1)^x} .$$

Or, comme $a \in \mathcal{A}$, la série $\sum \dfrac{|a_p|}{(p+1)^x}$ converge. Si x' est un réel tel que $0 < x' < x$, on a facilement $\dfrac{|a_p|\,\ln(p+1)}{(p+1)^x} = o\Big(\dfrac{|a_p|}{(p+1)^{x'}}\Big)$ lorsque $p \to +\infty$, d'où la convergence des séries figurant dans le terme de droite de la majoration ci-dessus. Par comparaison des sommes partielles de séries à termes positifs, on déduit la convergence de la série de terme général $\dfrac{|b_n|}{(n+1)^x}$ pour tout $x > 0$, ce qui montre que $b \in \mathcal{A}$. Enfin, il ne reste plus qu'à remarquer que, pour $y \in [0, 1[$, on a $\psi_a(y) = \varphi_a(y)\,\ln(1-y) = \varphi_b(y)$, et à utiliser les questions **8.b.** et **10.a.** pour conclure que $f_a' = f_b$.