DM de MATHÉMATIQUES numéro 7 COMMENTAIRES
PSI2 2024-2025

EXERCICE

Exercice qui commence par un grand nombre de questions plutôt standard, donc sur lesquelles je n'ai pas beaucoup de commentaires à faire, sauf peut-être toutefois: **Ne pas oublier de mentionner la continuité quand vous invoquez le théorème de stricte positivité!** Ce théorème intervient en effet plusieurs fois (questions **1.b.**, **5.b.** et **5.c.**).

1.a. Une étude locale en 0 ne sert à rien, il suffit de mentionner la continuité de $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ sur $[0, +\infty[$ avec un crochet fermé en 0.

3.b. Des explications parfois embrouillées...

5.b. De nombreuses imprécisions de rédaction: si l'on raisonne par l'absurde, l'hypothèse à faire n'est pas que **toutes** les racines de P_n sont de multiplicité paire, mais seulement celles qui sont dans $\mathbb{R}_+^*$, a priori il peut aussi y avoir des racines réelles négatives ou bien non réelles, de multiplicité quelconque. Si l'on propose une écriture factorisée de P_n, il faut tenir compte de ses éventuelles racines non réelles positives.

5.c. Question assez proche de la **5.b.** avec des erreurs assez proches aussi.

6.a. Le fait qu'il suffit de montrer la relation **(*)** pour les polynômes de la base canonique n'a souvent pas été expliqué, ou alors a fait l'objet de calculs assez lourds... **Apprenez à formaliser un peu!** Les applications $P \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ et $P \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i)$ sont linéaires. **Pour que deux applications linéaires soient égales, il suffit qu'elles coïncident sur une base.** Je n'ai pas souvent lu cette phrase, qui figure pourtant dans tous les bons cours de 1ère année.

PROBLÈME

Il y a globalement encore pas mal d'erreurs dans l'application des théorèmes du cours (continuité de la somme d'une série de fonctions, interversion série-intégrale, etc.), et surtout: **il y a bien trop d'erreurs sur le calcul asymptotique, des manipulations douteuses d'équivalents, des limites qui dépendent encore de la variable, etc.** Tout ça, c'est le cours de 1ère année, il est plus que temps de maîtriser un peu mieux ces techniques!

Concernant ce problème, qui passe en revue un peu tout le programme d'analyse de deuxième année, il y a aussi des affirmations fausses sur le comportement de suites ou de fonctions usuelles, notamment j'ai souvent lu que, pour $x > 0$ fixé, on a $x(x+1)\cdots(x+n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$, autrement dit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 1$, ce qui est faux ; en effet, par exemple pour $x = 1$, on a

$$u_n(1) = \frac{n!}{1 \times 2 \times \cdots \times (n+1)} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

En fait, une lecture plus détaillée du sujet montre (question **1.b.**) que, pour $x > 0$ fixé,

$$u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} l(x)\, v_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{l(x)}{n^x}\,, \quad \text{et donc} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0\,.$$

Pour la culture, on peut montrer que $l(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^x u_n(x) = \Gamma(x)$, où Γ est la "fonction eulérienne" que vous avez déjà rencontrée (dans le DS 3).

Une autre affirmation fausse lue plusieurs fois: "si une suite (a_n) n'est pas bornée, alors $|a_n| \geq 1$ à partir d'un certain rang". Bien sûr que non! Considérer par exemple la suite (a_n) avec $a_n = n$ si n est pair, et $a_n = 0$ si n est impair!

1.a. Quelques erreurs déjà mentionnées ci-dessus dans le maniement des calculs asymptotiques, notamment **on n'ajoute pas entre eux des équivalents**, mais on ajoute des développements limités (donc avec un reste) et, une fois le calcul terminé, on peut éventuellement énoncer le résultat final sous la forme d'un équivalent.

2. Inutile d'ouvrir la "boîte à epsilon" pour traiter cette question, il suffit d'appliquer le critère des équivalents concernant les séries à termes positifs.

4.a. Plusieurs erreurs dans certaines copies où on essaie de prouver la convergence uniforme en majorant le reste d'ordre n de la série (ce qui est déjà un peu lourd), mais si cette majoration n'est pas uniforme, eh bien on n'a rien montré du tout!

À chaque fois que vous parlez de convergence normale ou uniforme, merci de toujours clairement préciser sur quel intervalle!

8.a. Cette question, qui me semble pourtant assez simple, a été l'objet de très nombreuses erreurs, dont certaines déjà mentionnées, ou comme la majoration $\dfrac{y^n}{u_n(x)} \leq y^n$, il n'y a aucune raison en effet pour que $u_n(x)$ soit supérieur à 1.

8.b. Attention! L'intégrale considérée n'est pas une intégrale sur un segment... enfin pas toujours! Si $0 < x < 1$ notamment, le facteur $(1-y)^{x-1}$ tend vers $+\infty$ lorsque $y \to 1$, il faut donc considérer ici qu'on a une intégrale généralisée sur l'intervalle $[0, 1[$ **qui n'est pas un segment**. L'intégration terme à terme ne peut donc pas être justifiée par un argument de convergence uniforme ou normale.

10.a. Comme en **8.a.**, ce n'est pas une intégrale sur un segment, mais sur l'intervalle $[0, 1[$, il n'est donc pas possible d'invoquer le théorème des bornes atteintes pour dominer la dérivée partielle par une constante, il faut ici chercher une majoration explicite pour vérifier l'hypothèse de domination.