DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 6

PSI2 2024-2025 **le 08/02/2025**

IMPORTANT! Chacun(e) d'entre vous doit choisir entre deux options:
- option "difficile": EXERCICE 1 + PROBLÈME 1
ou bien
- option "facile": EXERCICE 1 + EXERCICE 2 + PROBLÈME 2

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, on note α un réel strictement supérieur à 1.

1. Pour tout $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

a. Justifier l'existence de $\Gamma(x)$ pour $x > 0$.

b. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad t^{x-1} \leq t^{a-1} + t^{b-1}\ .$$

c. En déduire que la fonction Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Soit un entier n strictement positif.

a. Justifier l'existence de l'intégrale notée I_n égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$.

b. En déduire l'existence de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\left(1+\frac{u}{n}\right)^n}\, \mathrm{d}u$, et trouver une relation simple entre I_n et J_n.

3.a. Pour $u \geq 0$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{u}{n}\right)^n$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ \forall u \geq 0 \quad \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \geq 1+u$.

4.a. Montrer, en le justifiant soigneusement, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

b. En déduire un équivalent de l'intégrale I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

5.a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} I_n x^n$.

b. Pour x réel tel que $|x| < R$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$. Montrer que

$$\forall x \in]-R, R[\qquad S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x\ \mathrm{d}t}{1+t^\alpha - x}\ .$$

PROBLÈME 1

Les différentes parties de ce problème sont assez largement indépendantes.

Si $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ est une famille finie de n vecteurs d'un espace préhilbertien réel E, on appelle **matrice de Gram** de cette famille la matrice carrée d'ordre n, notée $G(\mathcal{X})$ ou $G(x_1, \cdots, x_n)$, dont le coefficient d'indices $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ est $g_{i,j} = (x_i|x_j)$. Ainsi,

$$G(x_1, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & (x_1|x_2) & \cdots & (x_1|x_n) \\ (x_2|x_1) & \|x_2\|^2 & \cdots & (x_2|x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n|x_1) & (x_n|x_2) & \cdots & \|x_n\|^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \; .$$

Le déterminant de cette matrice, appelé **déterminant de Gram** de la famille $\mathcal{X}$, est noté $\Gamma(\mathcal{X})$ ou $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$.

Si x et y sont deux vecteurs non nuls de E préhilbertien, on appelle **angle géométrique** de x et y le nombre $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\alpha) = \dfrac{(x|y)}{\|x\| \, \|y\|}$, autrement dit $\alpha = \text{Arccos}\left(\dfrac{(x|y)}{\|x\| \, \|y\|}\right)$.

PARTIE A. Propriétés générales des matrices de Gram

1. Soit $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ une matrice non nécessairement carrée. On note u et f les applications linéaires canoniquement associées aux matrices M et $M^\top M$ respectivement.

a. Préciser les espaces vectoriels de départ et d'arrivée des applications linéaires u et f.

b. Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(u)$.

c. En déduire que $\text{rg}(M^\top M) = \text{rg}(M)$.

2. Soit $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille finie de vecteurs d'un espace préhilbertien réel E, de rang r. Soit $V = \text{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\mathcal{X}$, soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_r)$ une base orthonormale de V. Soit $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})$ la matrice de la famille $\mathcal{X}$ relativement à la base $\mathcal{B}$, i.e. la matrice de $\mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ dont la j-ième colonne $(1 \leq j \leq n)$ est constituée des coordonnées du vecteur x_j dans la base $\mathcal{B}$.

a. Exprimer le coefficient d'indice (i,j) de la matrice $M^\top M$, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

b. En déduire que $\text{rg}\big(G(\mathcal{X})\big) = \text{rg}(\mathcal{X})$. **Le rang de la matrice de Gram d'une famille de vecteurs est égal au rang de cette famille de vecteurs.**

c. Dans quel cas la matrice $G(\mathcal{X})$ est-elle inversible ? Montrer que, si tel est le cas, alors $\Gamma(\mathcal{X}) > 0$.

3. Une application. Soient u, v, w trois vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien E. On note α, β, γ les angles géométriques respectivement de v et w, de w et u, de u et v. En utilisant une matrice de Gram, prouver l'inégalité

$$\forall (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \qquad 1 + 2\,\cos(\alpha)\,\cos(\beta)\,\cos(\gamma) \geq \cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) \; .$$

4.a. Soit $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille finie de vecteurs d'un espace préhilbertien réel E, montrer que sa matrice de Gram $G = G(\mathcal{X})$ est symétrique positive, i.e. $G \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

b. Réciproquement, soit $G \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $G = M^\top M$. En déduire qu'il existe une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire canonique) dont G est la matrice de Gram.

PARTIE B. Familles isométriques

Soit E un espace euclidien. Deux familles finies de vecteurs de E, de même cardinal, sont dites **isométriques** lorsqu'elles ont la même matrice de Gram. Si l'on note $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_p)$ et $\mathcal{Y} = (y_1, \cdots, y_p)$, les familles $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont donc isométriques si et seulement si on a

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \qquad (y_i|y_j) = (x_i|x_j)\ .$$

Dans toute la suite, E est un espace euclidien de dimension n, on notera $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_p)$ et $\mathcal{Y} = (y_1, \cdots, y_p)$ deux familles de vecteurs de E, de même cardinal p.

5. On suppose qu'il existe $u \in \mathrm{O}(E)$, i.e. une isométrie vectorielle de l'espace euclidien E, telle que

$$\forall i \in [\![1,p]\!] \qquad u(x_i) = y_i\ .$$

Montrer que les familles $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont isométriques.

6. Réciproquement, on suppose $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ isométriques.

a. Montrer que les familles de vecteurs $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ ont le même rang, que l'on notera r.

b. On renumérote simultanément les vecteurs des deux familles $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ de façon à ce que la famille $(x_1, \cdots, x_r)$ extraite de $\mathcal{X}$ soit libre. Expliquer pourquoi la famille $(y_1, \cdots, y_r)$ extraite de $\mathcal{Y}$ est alors libre aussi.

On pose maintenant $V = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_r)$ et $W = \mathrm{Vect}(y_1, \cdots, y_r)$. On note $(e_{r+1}, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de $V^\perp$, et $(e'_{r+1}, \cdots, e'_n)$ une base orthonormale de $W^\perp$.

c. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme u de E tel que

$$\forall i \in [\![1,r]\!] \quad u(x_i) = y_i \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![r+1,n]\!] \quad u(e_i) = e'_i\ .$$

d. Montrer que u conserve le produit scalaire.

e. Pour tout $i \in [\![r+1,p]\!]$, montrer que $y_i - u(x_i) \in W \cap W^\perp$.

f. Conclure.

PARTIE C. Distance à un sous-espace de dimension finie

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On considère n vecteurs v_1, $\cdots$, v_n d'un espace préhilbertien réel E.

7. Soit λ un réel.

a. Exprimer $\Gamma(v_1, \cdots, v_{n-1}, \lambda v_n)$ en fonction de λ et de $\Gamma(v_1, \cdots, v_{n-1}, v_n)$.

b. Exprimer $\Gamma(v_1, \cdots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_1)$ en fonction de $\Gamma(v_1, \cdots, v_{n-1}, v_n)$.

8. Soit $V = \mathrm{Vect}(v_1, \cdots, v_n)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par v_1, $\cdots$, v_n.

a. Soit $w \in V^\perp$. Exprimer $\Gamma(v_1, \cdots, v_n, w)$ en fonction de w et de $\Gamma(v_1, \cdots, v_n)$.

b. Soit $x \in E$, on note $d(x,V)$ la distance du vecteur x au sous-espace V. Prouver l'égalité

$$\Gamma(v_1, \cdots, v_n, x) = \big(d(x,V)\big)^2\, \Gamma(v_1, \cdots, v_n)\ .$$

c. Prouver l'inégalité

$$\Gamma(v_1, \cdots, v_n) \leq \prod_{k=1}^{n} \|v_k\|^2$$

(*on pourra procéder par récurrence sur* n).

d. En déduire l'**inégalité de Hadamard**: si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$(\mathbf{H}) : \qquad \big|\det(A)\big| \leq \prod_{j=1}^{n} \big\|C_j(A)\big\|_2 \ ,$$

où $C_j(A) \in \mathbb{R}^n$ est la j-ième colonne de A et $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

e. Montrer que l'égalité a lieu dans **(H)** si et seulement si, ou bien une des colonnes de A est nulle, ou bien les colonnes de A sont deux à deux orthogonales.

9. Un calcul auxiliaire. Pour n et k entiers naturels avec $0 \leq k \leq n$, on introduit la matrice

$$A_{n,k} = \begin{pmatrix} \binom{n-k}{0} & \cdots & \binom{n}{k} \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{0} & \cdots & \binom{n+k}{k} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k+1}(\mathbb{R}) \ .$$

C'est une matrice carrée d'ordre $k{+}1$ *dont le coefficient d'indices* (i,j) *vaut* $\binom{n-k+i+j}{j}$, *si les lignes et colonnes sont numérotées de 0 à* k.

On pose ensuite $D_{n,k} = \det(A_{n,k})$, avec $0 \leq k \leq n$.

a. En utilisant des opérations élémentaires sur les lignes et la relation de Pascal entre les coefficients binomiaux, montrer que $D_{n,k} = D_{n,k-1}$ avec $1 \leq k \leq n$.

b. En déduire la valeur de $D_{n,n}$ pour tout n entier naturel.

c. En déduire la valeur du déterminant Δ_n d'ordre $n+1$ ci-dessous:

$$\Delta_n = \det\big((i+j)!\big)_{0 \leq i,j \leq n} = \begin{vmatrix} 0! & 1! & \cdots & n! \\ 1! & 2! & \cdots & (n+1)! \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n! & (n+1)! & \cdots & (2n)! \end{vmatrix} \ .$$

10. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels.

a. Vérifier que l'on munit E d'un produit scalaire en posant

$$\forall (P,Q) \in E^2 \qquad (P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t \ .$$

b. Calculer $(X^p|X^q)$ pour p et q entiers naturels.

c. Pour tout n entier naturel non nul, on pose

$$m_n = \min_{(a_0,\cdots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^{+\infty} \left(t^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k \right)^2 e^{-t}\, \mathrm{d}t \right) .$$

Prouver l'existence de m_n que l'on exprimera à l'aide d'une distance d'un vecteur de E à un sous-espace de dimension finie. Montrer que $m_n = (n!)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 2

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices carrées d'ordre n.

1. Montrer que les matrices $A^\top A$ et $B^\top B$ sont symétriques positives.

On note α la plus grande valeur propre de $A^\top A$, et β la plus grande valeur propre de $B^\top B$.

2. Prouver, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, l'inégalité $X^\top A^\top AX \leq \alpha\, X^\top X$.

3. Que peut-on en déduire sur les valeurs propres réelles de la matrice A ?

4. Soit λ une valeur propre réelle de la matrice $M = A^\top B$. Montrer que $|\lambda| \leq \sqrt{\alpha\beta}$.

PROBLÈME 2

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, identifié à $\mathbb{R}^n$, sera muni du produit scalaire canonique défini par

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad (X|Y) = X^\top Y\ .$$

On note $\|\cdot\|_2$ la norme sur $\mathbb{R}^n$ associée à ce produit scalaire (norme euclidienne canonique).

Une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est qualifiée de **matrice binaire** si tous ses coefficients appartiennent à $\{-1, 1\}$.

On appelle **matrice de Hadamard** toute matrice binaire $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les vecteurs-colonnes $\big(C_1(A), \cdots, C_n(A)\big)$ constituent une famille orthogonale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Montrer que le déterminant d'une matrice dont les coefficients sont des entiers relatifs est aussi un entier relatif.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, combien y a-t-il de matrices binaires d'ordre n ?

3. Donner un exemple de matrice de Hadamard d'ordre 2.

4. Soit $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $S = \dfrac{1}{2} A_4$.

On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à S.

a. Montrer que A_4 est une matrice de Hadamard.

b. Montrer que φ est une symétrie, en déduire $\mathrm{Sp}(S)$.

c. En déduire que A_4 est diagonalisable, avec $\mathrm{Sp}(A_4) = \{-2, 2\}$.

d. Diagonaliser A_4.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice binaire. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes:

(i): A est une matrice de Hadamard

(ii): la matrice $B = \dfrac{1}{\sqrt{n}} A$ est orthogonale.

(iii): $A^\top A = nI_n$.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de Hadamard, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A.
Montrer que $|\lambda| = \sqrt{n}$.
On rappelle que, si $X = (x_1, \cdots, x_n)$ est un vecteur de $\mathbb{C}^n$ (identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$), alors l'expression $\overline{X}^\top X = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$ est le carré de la "norme hermitienne" $\|X\|_2$ du vecteur X.

7. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice binaire. On transforme A en une matrice A' par les opérations suivantes sur les lignes:

$$L_i \leftarrow a_{1,1}\, L_i - a_{i,1}\, L_1 \qquad (2 \leq i \leq n)\ .$$

a. Donner la relation entre $\det(A)$ et $\det(A')$.

b. Montrer que $A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, avec B' une matrice carrée d'ordre $n-1$, dont tous les coefficients sont dans l'ensemble $\{-2, 0, 2\}$.

c. Montrer que $\det(A)$ est un entier relatif multiple de 2^{n-1}.

d. On suppose, dans cette question, que A est une matrice de Hadamard et que $n \geq 3$. Montrer que $\big|\det(A)\big| = n^{\frac{n}{2}}$ et en déduire que n est multiple de 4.

8. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée inversible, on notera $C_1, \cdots, C_n$ ses vecteurs-colonnes, considérés comme des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$. Alors la famille de vecteurs $\mathcal{C} = (C_1, \cdots, C_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, soit $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ son orthonormalisée. On note $R = (r_{i,j}) = P_{\mathcal{E},\mathcal{C}}$ la matrice de passage de la base orthonormale $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{C}$. On notera enfin $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (*on notera qu'elle est aussi orthonormale pour le produit scalaire canonique*).

a. Rappeler les conditions que doivent vérifier les vecteurs de la famille $\mathcal{E}$.

b. En déduire que la matrice R est triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux strictement positifs. *On pourra interpréter les coefficients $r_{i,j}$ comme des produits scalaires.*

c. En déduire les inégalités $0 < \det(R) \leq \prod_{j=1}^{n} \|C_j\|_2$.

d. La matrice A peut être interprétée comme la matrice de passage de la base canonique à la base de ses vecteurs-colonnes: $A = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}}$. En utilisant la relation de Chasles sur les matrices de passage (*si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases d'un espace vectoriel E de dimension finie, on a* $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$), montrer que $|\det(A)| = \det(R)$.

e. On déduit ainsi l'**inégalité de Hadamard**: si $A \in \mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ est une matrice de colonnes $C_1, \cdots, C_n$, alors

$$|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^{n} \|C_j\|_2 \ .$$

Question: En supposant A inversible, quels sont les cas d'égalité ?

f. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathrm{I\!R})$ une matrice binaire. Montrer que A est une matrice de Hadamard si et seulement si on a $|\det(A)| = n^{\frac{n}{2}}$.

9. Soit la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathrm{I\!R})$, puis par récurrence pour $n \geq 2$, on pose

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_{n-1} & -A_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2^n}(\mathrm{I\!R}) \ .$$

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathrm{I\!N}^*$, A_n est une matrice de Hadamard.

b. Montrer que, pour tout n, la matrice A_n est diagonalisable, et préciser ses valeurs propres.

10. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que, s'il existe une matrice de Hadamard d'ordre n, alors il existe une matrice de Hadamard d'ordre $2n$.

En 1893, le mathématicien Jacques Hadamard a conjecturé que, pour tout n entier naturel non nul et multiple de 4, il existait une "matrice de Hadamard" d'ordre n. Ce résultat n'a encore jamais été démontré ni infirmé. À l'heure actuelle, le plus petit ordre multiple de 4 pour lequel aucune matrice de Hadamard n'est connue est 668. Ces matrices ont des applications, notamment pour la théorie des codes correcteurs d'erreurs.