CORRIGÉ du DS de MATHÉMATIQUES numéro 6

PSI2 2024-2025 **le 08/02/2025**

EXERCICE

d'après e3a MP, 2017

1.a. Posons $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, cela pourra toujours servir. Pour tout $x > 0$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et,

- lorsque $t \to 0$, on a $f(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x<1$, d'où l'intégrabilité en 0 ;

- lorsque $t \to +\infty$, on a $t^2\, f(x,t) = t^{x+1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, donc $f(x,t) = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$, et $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable en $+\infty$.

Pour tout $x > 0$, l'intégrale $\Gamma(x)$ est donc convergente.

b. Pour $x \in [a,b]$,

- si $0 < t \leq 1$, alors $0 \leq t^{x-1} \leq t^{a-1} \leq t^{a-1} + t^{b-1}$;

- si $t \geq 1$, alors $0 \leq t^{x-1} \leq t^{b-1} \leq t^{a-1} + t^{b-1}$.

c. L'application $(x,t) \mapsto f(x,t)$ est continue sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, ce qui entraîne la continuité par morceaux par rapport à t et la continuité par rapport à x. Enfin, si $S = [a,b]$ est un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, on a la domination

$$\forall (x,t) \in S \times \mathbb{R}_+^* \qquad \big|f(x,t)\big| = f(x,t) \leq \varphi_S(t)\ ,$$

avec $\varphi_S(t) = (t^{a-1} + t^{b-1})\, e^{-t}$ d'après **1.b.** Cette fonction φ_S est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (même étude qu'en **1.a.**). On déduit la continuité de $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.a. La fonction $g_n : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^\alpha)^n}$ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 avec $f_n(0) = 1$ et on a $g_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{n\alpha}}$, avec $n\alpha > 1$, d'où son intégrabilité en $+\infty$ et l'existence de l'intégrale I_n.

b. La fonction $h_n : u \mapsto \dfrac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{\Big(1+\dfrac{u}{n}\Big)^n}$ est continue sur $]0,+\infty[$, on a $h_n(u) \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u^{1-\frac{1}{\alpha}}}$ avec $1 - \dfrac{1}{\alpha} < 1$ d'où son intégrabilité en 0, et $h_n(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^n}{u^{n+1-\frac{1}{\alpha}}}$ avec $n+1-\dfrac{1}{\alpha} > 1$ d'où son intégrabilité en $+\infty$. Cela prouve l'existence (la convergence) de l'intégrale généralisée J_n.

c. Le changement de variable $u = nt^\alpha$, soit encore $t = \Big(\dfrac{u}{n}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}$ montre que $J_n = \alpha\, n^{\frac{1}{\alpha}}\, I_n$ (*détails de calcul laissés à l'improbable lecteur*).

3.a. Classique! $\Big(1+\dfrac{u}{n}\Big)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{u}{n}\right)} = e^{u+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^u$ par continuité de la fonction exponentielle.

b. Si on développe $\Big(1+\dfrac{u}{n}\Big)^n$ par la formule du binôme, on voit que les deux premiers termes sont 1 et u et, comme les autres sont positifs... détaillons!

$$\Big(1+\frac{u}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Big(\frac{u}{n}\Big)^k = 1 + u + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \Big(\frac{u}{n}\Big)^k \geq 1 + u\ .$$

4.a. Reprenons les fonctions h_n introduites dans le corrigé de **2.b.** Ces fonctions sont continues (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $u > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(u) = h(u)$ avec $h(u) = u^{\frac{1}{\alpha}-1}\, e^{-u}$, la suite (h_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers une fonction c.p.m. h. En utilisant **3.b.**, on a enfin la domination

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall u \in \mathbb{R}_+^* \qquad \big|h_n(u)\big| = h_n(u) \leq \varphi(u)\ , \quad \text{avec} \quad \varphi(u) = \frac{u^{\frac{1}{\alpha}-1}}{1+u}\ ,$$

et cette fonction φ est c.p.m. et intégrable sur $]0,+\infty[$ car $\varphi(u) \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u^{1-\frac{1}{\alpha}}}$ avec $1-\dfrac{1}{\alpha} < 1$ d'où son intégrabilité en 0, $\varphi(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{u^{2-\frac{1}{\alpha}}}$ et $2-\dfrac{1}{\alpha} > 1$ d'où son intégrabilité en $+\infty$.

Le théorème de convergence dominée s'applique donc, et nous donne le résultat

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} h(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1}\ e^{-u}\,\mathrm{d}u = \Gamma\Big(\frac{1}{\alpha}\Big)\ .$$

b. Avec **2.c.**, on a immédiatement $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\Gamma\Big(\dfrac{1}{\alpha}\Big)}{\alpha\ n^{\frac{1}{\alpha}}}$.

5.a. Cet équivalent nous permet de dire que le rayon de convergence R recherché est le même que celui de la série entière $\sum n^{-\frac{1}{\alpha}} x^n$, à savoir $R = 1$ (puisque, pour cette dernière série entière, la règle de d'Alembert d'applique facilement).

b. Pour $x \in]-1,1[$ donc, on a $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n\,\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$.

Le réel $x \in]-1,1[$ étant fixé, posons donc $f_n(t) = \dfrac{x^n}{(1+t^\alpha)^n}$ pour $t \in]0,+\infty[$. On a ainsi une série de fonctions c.p.m. et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ (car f_n est prolongeable par continuité en 0 et $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^n}{t^{n\alpha}}$ avec $n\alpha > 1$). La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ car, pour x fixé, c'est une série géométrique de raison $\dfrac{x}{1+t^\alpha}$ (strictement inférieure à 1 en valeur absolue), sa somme est

$$s(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) = \frac{\dfrac{x}{1+t^\alpha}}{1-\dfrac{x}{1+t^\alpha}} = \frac{x}{1+t^\alpha - x}$$

(fonction c.p.m. sur $\mathbb{R}_+^*$).

Enfin, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big|f_n(t)\big|\,\mathrm{d}t = |x|^n\ I_n$ est sommable car $x \in]-1,1[$ qui est l'intervalle de convergence de la série entière $\sum I_n x^n$.

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique donc et donne le résultat:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} s(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+t^\alpha - x}\,\mathrm{d}t\ .$$

PROBLÈME 1

PARTIE A. Propriétés générales des matrices de Gram

1.a. La matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ représente canoniquement une application linéaire u de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$. La matrice $N = M^\top M$, carrée d'ordre n, représente canoniquement un endomorphisme f de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. Rappelons que l'on a $u : X \mapsto MX$ et $f : X \mapsto M^\top MX$.

b. Soit v l'application linéaire (alors de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$) canoniquement associée à la matrice $M^\top \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Comme $N = M^\top M$, on a $f = v \circ u$, ce qui donne déjà l'inclusion $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}(f)$, i.e. si $f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$, alors x est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ canoniquement représenté par une matrice-colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $M^\top MX = 0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On en déduit $X^\top M^\top MX = 0$ (scalaire), soit $(MX)^\top(MX) = 0$, soit $\|MX\|^2 = 0$, soit $\big\|u(x)\big\|^2 = 0$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^p$. On a donc $u(x) = 0_{\mathbb{R}^p}$, ce qui prouve l'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(u)$. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(u)$.

c. Les applications linéaires u et f ayant toutes deux pour espace de départ $\mathbb{R}^n$, le théorème du rang donne alors

$$\mathrm{rg}(f) = n - \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) = n - \dim\big(\mathrm{Ker}(u)\big) = \mathrm{rg}(u)\ ,$$

soit $\mathrm{rg}(M^\top M) = \mathrm{rg}(M)$.

2.a. Posons $M = (m_{k,j})_{1 \leq k \leq r, 1 \leq j \leq n}$. On a alors $x_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} m_{k,j} e_k$, ce qui traduit la définition de $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})$. La matrice $M^\top M$ est carrée d'ordre n, et si l'on note $g_{i,j}$ son coefficient d'indices (i,j) avec $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la formule de calcul des coefficients d'un produit matriciel donne $g_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} m_{k,i} m_{k,j}$. On reconnaît la somme des produits deux à deux des coordonnées des vecteurs x_i et x_j dans la base **orthonormale** $\mathcal{B}$ de V, donc $g_{i,j} = (x_i|x_j)$. On a finalement montré que $M^\top M = G(\mathcal{X})$, c'est la matrice de Gram de la famille de vecteurs $\mathcal{X}$.

b. De la question **1.c.**, on déduit alors que $\mathrm{rg}\,\big(G(\mathcal{X})\big) = \mathrm{rg}(M^\top M) = \mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}\,\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})\big)$, c'est le rang r de la famille de vecteurs $\mathcal{X}$.

c. La matrice $G(\mathcal{X})$ étant carrée d'ordre $n = \mathrm{Card}(\mathcal{X})$, elle est inversible si et seulement si elle est de rang n, i.e. si et seulement si la famille de vecteurs $\mathcal{X}$ est de rang n, i.e. si et seulement si la famille $\mathcal{X}$ est libre.

Si tel est le cas, alors M est aussi une matrice carrée d'ordre n inversible, et comme $M^\top$ et M ont le même déterminant, on a alors $\Gamma(\mathcal{X}) = \det\big(G(\mathcal{X})\big) = \det(M^\top M) = \big(\det(M)\big)^2 > 0$.

On a donc, dans tous les cas, $\Gamma(\mathcal{X}) \geq 0$.

3. Les vecteurs étant unitaires, on a $(v|w) = \cos(\alpha)$, $(w|u) = \cos(\beta)$ et $(u|v) = \cos(\gamma)$, donc

$$G(u,v,w) = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\gamma) & \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) & 1 & \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) & \cos(\alpha) & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Le déterminant de cette matrice est positif ou nul selon **2.c.** En développant le déterminant par exemple par la règle de Sarrus (pertinente ici car il n'y a pas besoin de factoriser), on obtient directement l'inégalité demandée.

4.a. Il est clair que G est symétrique puisque $g_{i,j} = (x_i|x_j) = (x_j|x_i) = g_{j,i}$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. D'après la question **2.**, il existe une matrice rectangulaire $M \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ telle que $G = M^\top M$. Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a alors

$$X^\top G X = X^\top M^\top M X = (MX)^\top (MX) = \|MX\|^2 \geq 0\ ,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^r$. Donc G est positive.

b. Soit $G \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Par le théorème spectral, on peut écrire $G = PDP^{-1} = PDP^\top$ avec $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ matrice orthogonale, et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, où les λ_i sont des réels positifs. Posons $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$, alors $\Delta^2 = \Delta^\top \Delta = D$, et la matrice $M = \Delta P^\top$ convient puisque $M^\top M = (\Delta P^\top)^\top \Delta P^\top = P \Delta^2 P^\top = G$.

Remarque. La matrice $M' = P\Delta P^\top$ convient aussi, et elle est aussi symétrique positive.

Si l'on considère, dans $\mathbb{R}^n$, la famille $\mathcal{C} = \big(C_1(M), \cdots, C_n(M)\big)$ des colonnes d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^\top M = G$, on a $g_{j,k} = \displaystyle\sum_{i=1}^n m_{i,j} m_{i,k} = \big(C_j(M)\big|C_k(M)\big)$ pour tout couple (j,k), et G est la matrice de Gram de la famille de vecteurs $\mathcal{C}$. **Toute matrice symétrique positive est donc une matrice de Gram.**

PARTIE B. Familles isométriques

5. C'est une conséquence directe de la conservation du produit scalaire par l'isométrie u.

6.a. On a égalité entre les matrices de Gram $G(\mathcal{X})$ et $G(\mathcal{Y})$. Donc $\mathrm{rg}(\mathcal{X}) = \mathrm{rg}(\mathcal{Y})$ par la question **2.b.**

b. Après renumérotation simultanée (i.e. on effectue la même permutation des indices sur les deux familles de vecteurs), on a toujours $(y_i|y_j) = (x_i|x_j)$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, et les matrices de Gram des familles extraites $(x_1, \cdots, x_r)$ et $(y_1, \cdots, y_r)$ coïncident encore. Comme la première famille est libre, sa matrice de Gram est inversible, donc la deuxième famille est libre aussi en utilisant **2.c.**

c. La famille $\mathcal{B} = (x_1, \cdots, x_r, e_{r+1}, \cdots, e_n)$, obtenue par concaténation des bases de deux sous-espaces supplémentaires, est une base de E. On sait par ailleurs qu'une application linéaire de E vers lui-même (ou, plus généralement, vers n'importe quel autre espace vectoriel) est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base de E.

d. Soient x et x' deux vecteurs de E, décomposons-les dans la base $\mathcal{B}$ introduite à la question précédente:

$$x = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i e_i \qquad \text{et} \qquad x' = \sum_{j=1}^r \alpha'_j x_j + \sum_{j=r+1}^n \alpha'_j e_j\ .$$

En utilisant l'orthogonalité de $V = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_r)$ et de $V^\perp = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \cdots, e_n)$ et le fait que $(e_{r+1}, \cdots, e_n)$ est une famille orthonormale, on a

$$(x|x') = \Big(\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i \mid \sum_{j=1}^r \alpha'_j x_j\Big) + \Big(\sum_{i=r+1}^n \alpha_i e_i \mid \sum_{j=r+1}^n \alpha'_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i \alpha'_j (x_i|x_j) + \sum_{i=r+1}^n \alpha_i \alpha'_i\ .$$

Ensuite, $u(x)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i y_i+\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_i e'_i$ et $u(x')=\sum_{j=1}^{r}\alpha'_j y_j+\sum_{j=r+1}^{n}\alpha'_j e'_j$, et un calcul analogue donne, en utilisant $(y_i|y_j)=(x_i|x_j)$,

$$\big(u(x)|u(x')\big)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i\alpha'_j(y_i|y_j)+\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_i\alpha'_i=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\alpha_i\alpha'_j(x_i|x_j)+\sum_{i=r+1}^{n}\alpha_i\alpha'_i=(x|x')\ .$$

Donc u est une isométrie de E.

e. Pour $i\in[\![r+1,p]\!]$, alors y_i est combinaison linéaire de $y_1,\cdots,y_r$. En effet, la famille $(y_1,\cdots,y_r,y_{r+1},\cdots,y_p)$ est de rang r et les r premiers vecteurs forment une famille libre, donc les vecteurs suivants sont combinaisons linéaires des r premiers. Donc $y_i\in W$. D'autre part, pour la même raison, x_i est combinaison linéaire de $x_1,\cdots,x_r$, donc par linéarité de u, $u(x_i)$ est combinaison linéaire de $u(x_1),\cdots,u(x_r)$, c'est-à-dire de $y_1,\cdots,y_r$, donc $u(x_i)\in W$ et, par différence, $y_i-u(x_i)\in W$.

D'autre part, si $i\in[\![r+1,p]\!]$ et $j\in[\![1,r]\!]$, alors

$$\big(y_i-u(x_i)|y_j\big)=(y_i|y_j)-\big(u(x_i)|y_j\big)=(y_i|y_j)-\big(u(x_i)|u(x_j)\big)=(y_i|y_j)-(x_i|x_j)=0\ ,$$

donc $y_i-u(x_i)$ est orthogonal à $\mathrm{Vect}(y_1,\cdots,y_r)=W$.

f. Pour $i\in[\![r+1,p]\!]$, le vecteur $y_i-u(x_i)$ est donc nul. On a finalement $u(x_i)=y_i$ pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, l'endomorphisme u étant une isométrie.

On a ainsi prouvé que deux familles de vecteurs de E de même cardinal sont "isométriques" (i.e. ont la même matrice de Gram) si et seulement s'il existe une isométrie envoyant l'une sur l'autre.

PARTIE C. Distance à un sous-espace de dimension finie

7.a. Par bilinéarité du produit scalaire, si le vecteur v_n est multiplié par λ, alors la dernière ligne et la dernière colonne de la matrice de Gram de $(v_1,\cdots,v_n)$ sont chacune multipliées par λ (et le coefficient situé à l'intersection est donc multiplié par λ^2). La linéarité du déterminant d'une matrice par rapport à chaque ligne ou colonne de la matrice donne alors la relation

$$\Gamma(v_1,\cdots,v_{n-1},\lambda v_n)=\lambda^2\,\Gamma(v_1,\cdots,v_{n-1},v_n)\ .$$

b. On écrit

$$\Gamma(v_1,\cdots,v_{n-1},v_n+\lambda v_1)=\begin{vmatrix}(v_1|v_1) & \cdots & (v_1|v_{n-1}) & (v_1|v_n+\lambda v_1)\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ (v_{n-1}|v_1) & \cdots & (v_{n-1}|v_{n-1}) & (v_{n-1}|v_n+\lambda v_1)\\ (v_n+\lambda v_1|v_1) & \cdots & (v_n+\lambda v_1|v_{n-1}) & (v_n+\lambda v_1|v_n+\lambda v_1)\end{vmatrix}\ .$$

On développe les produits scalaires de la dernière ligne et de la dernière colonne, puis on fait les opérations $L_n\leftarrow L_n-\lambda L_1$ et $C_n\leftarrow C_n-\lambda C_1$ (qui conservent le déterminant). Au final,

$$\Gamma(v_1,\cdots,v_{n-1},v_n+\lambda v_1)=\Gamma(v_1,\cdots,v_n)\ .$$

8.a. Le vecteur w étant orthogonal à chaque vecteur v_i, $1 \leq i \leq n$, la matrice de Gram $G(v_1, \cdots, v_n, w)$ est diagonale par blocs:

$$G(v_1, \cdots, v_n, w) = \begin{pmatrix} & 0 \\ G(v_1, \cdots, v_n) & \vdots \\ & 0 \\ 0 \cdots 0 & \|w\|^2 \end{pmatrix} .$$

En prenant le déterminant, $\Gamma(v_1, \cdots, v_n, w) = \|w\|^2 \, \Gamma(v_1, \cdots, v_n)$.

b. Posons $w = x - p_V(x)$, avec p_V projecteur orthogonal sur V. On sait que $d(x, V) = \|w\|$. En réitérant des opérations analogues à celles effectuées en **7.b.**, on voit que

$$\Gamma(v_1, \cdots, v_n, x) = \Gamma\big(v_1, \cdots, v_n, x - p_V(x)\big) = \Gamma(v_1, \cdots, v_n, w)$$

(on ne modifie pas $\Gamma(v_1, \cdots, v_n, x)$ en retranchant au vecteur x une combinaison linéaire de v_1, $\cdots$, v_n). Puis, avec **8.a.**, comme w est orthogonal à V,

$$\Gamma(v_1, \cdots, v_n, w) = \|w\|^2 \, \Gamma(v_1, \cdots, v_n) = d(x, V)^2 \, \Gamma(v_1, \cdots, v_n) .$$

Ainsi, si $(v_1, \cdots, v_n)$ est libre, i.e. si c'est une base de V, alors $d(x, V) = \sqrt{\dfrac{\Gamma(v_1, \cdots, v_n, x)}{\Gamma(v_1, \cdots, v_n)}}$.

c. Pour $n = 1$, on a $\Gamma(v_1) = (v_1|v_1) = \|v_1\|^2$, c'est bon.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons la relation vraie pour toute famille de n vecteurs de E. Soit alors $(v_1, \cdots, v_n, v_{n+1})$ une famille de $n+1$ vecteurs. En introduisant $V_n = \text{Vect}(v_1, \cdots, v_n)$ et $w = v_{n+1} - p_{V_n}(v_{n+1})$, la question **8.b.** ci-dessus montre que

$$\Gamma(v_1, \cdots, v_n, v_{n+1}) = \|w\|^2 \, \Gamma(v_1, \cdots, v_n) .$$

Alors, par Pythagore, $\|w\| \leq \|v_{n+1}\|$, et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\Gamma(v_1, \cdots, v_n, v_{n+1}) \leq \|v_{n+1}\|^2 \, \Gamma(v_1, \cdots, v_n) \leq \|v_{n+1}\|^2 \prod_{k=1}^{n} \|v_k\|^2 = \prod_{k=1}^{n+1} \|v_k\|^2 ,$$

ce qui achève la récurrence.

d. Pour tout couple $(j, k) \in [\![1, n]\!]^2$, $(A^\top A)_{j,k} = \big(C_j(A)\big)^\top C_k(A) = \big(C_j(A) \mid C_k(A)\big)$, où $(\cdot|\cdot)$ est ici le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$, autrement dit la matrice $G = A^\top A$ est la matrice de Gram de la famille $\big(C_1(A), \cdots, C_n(A)\big)$ des colonnes de A. Donc, par **8.c.**, on obtient

$$\big(\det(A)\big)^2 = \det(A^\top A) = \det(G) = \Gamma\big(C_1(A), \cdots, C_n(A)\big) \leq \prod_{j=1}^{n} \big\|C_j(A)\big\|_2^2 .$$

En prenant la racine carrée, on obtient l'inégalité de Hadamard.

e. L'inégalité $\Gamma(v_1, \cdots, v_n) \leq \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \|v_k\|^2$ de **8.c.** est une égalité si et seulement si, soit l'un des facteurs $\|v_k\|^2$ est nul (i.e. l'un des vecteurs v_k est nul), soit à chaque étape dans la majoration par récurrence on a $\big\|v_{k+1} - p_{V_k}(v_{k+1})\big\| = \|v_{k+1}\|$ ce qui revient à dire que $v_{k+1} \in V_k^\perp$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ et finalement que $(v_1, \cdots, v_n)$ est une famille orthogonale.

9.a. Les opérations élémentaires sur les lignes: $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$, avec $1 \leq i \leq k$ (en numérotant lignes et colonnes de 0 à k comme le suggère l'énoncé) transforment la matrice $A_{n,k}$ en la matrice $\begin{pmatrix} \binom{n-k}{0} & \binom{n-k+1}{1} & \cdots & \binom{n}{k} \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_{n,k-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$. En effet, la relation de Pascal donne, avec $1 \leq i, j \leq k$,

$$\binom{n-k+i+j}{j} - \binom{n-k+(i-1)+j}{j} = \binom{n-k+i+j-1}{j-1} .$$

Comme $\binom{n-k}{0} = 1$, en développant par rapport à la première colonne, $D_{n,k} = D_{n,k-1}$.

b. Partant de $D_{n,0} = \binom{n}{0} = 1$ (c'est un scalaire), on obtient immd́iatement

$$D_{n,n} = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \cdots & \binom{n}{n} \\ \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{0} & \cdots & \binom{2n}{n} \end{vmatrix} = 1 .$$

c. On a donc $1 = D_{n,n} = \det\left(\binom{i+j}{j}\right)_{0 \leq i,j \leq n} = \det\left(\dfrac{(i+j)!}{i!\,j!}\right)_{0 \leq i,j \leq n}$. En factorisant par $\dfrac{1}{i!}$ sur la i-ième ligne et par $\dfrac{1}{j!}$ sur la j-ième colonne, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ et pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on obtient $1 = \dfrac{1}{\left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2} \Delta_n$, soit $\Delta_n = \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2$.

10.a. Par croissances comparées, on a $\lim_{t \to +\infty} t^2 P(t)Q(t)\, e^{-t} = 0$, donc $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est bien intégrable en $+\infty$, ce qui jusitfie la convergence de l'intégrale. Le caractère bilinéaire symétrique est évident. Enfin, $(P|P) = \int_0^{+\infty} P(t)^2\, e^{-t}\, \mathrm{d}t \geq 0$ par positivité de l'intégrale, et si $(P|P) = 0$, la fonction $t \mapsto P(t)^2\, e^{-t}$ étant continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de stricte positivité permet d'affirmer qu'alors cette fonction est nulle sur $\mathbb{R}_+$, puis que le polynôme P admet une infinité de racines, donc $P = 0$, on a ainsi le caractère défini positif.

b. Calcul classique laissé au lecteur: $(X^p|X^q) = \int_0^{+\infty} t^{p+q}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = (p+q)!$

c. En posant $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, l'intégrale figurant dans la définition de m_n s'écrit $\|X^n - P\|^2$ et, lorsque le n-uplet $(a_0, \cdots, a_{n-1})$ décrit $\mathbb{R}^n$, le polynôme P décrit alors le sous-espace $V = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ de E. On veut donc montrer l'existence de $m_n = \min_{P \in V} \|X^n - P\|^2$, le cours indique que ce minimum existe car le s.e.v. V est de dimension finie, et $m_n = d(X^n, V)^2$.

d. De la question **8.b.**, on déduit que

$$m_n = d(X^n, V)^2 = \frac{\Gamma(1, X, \cdots, X^{n-1}, X^n)}{\Gamma(1, X, \cdots, X^{n-1})} \ .$$

Or, pour tout n entier naturel, on a

$$\Gamma(1, X, \cdots, X^n) = \det\Big((X^i|X^j)\Big)_{0\leq i,j\leq n} = \det\big((i+j)!\big)_{0\leq i,j\leq n} = \Delta_n = \Big(\prod_{k=0}^{n} k!\Big)^2 \ .$$

Donc $m_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = (n!)^2$.

EXERCICE 2

1. D'abord, $(A^\top A)^\top = A^\top A$, cette matrice est donc symétrique.

Puis, si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^\top A^\top AX = (AX)^\top(AX) = \|AX\|^2$ où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$, donc $X^\top A^\top AX \geq 0$.

Donc $A^\top A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, idem pour $B^\top B$.

2. Par le théorème spectral, on peut écrire $A^\top A = PDP^{-1} = PDP^\top$ avec $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, où les λ_i sont les valeurs propres de $A^\top A$. Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

$$X^\top A^\top AX = X^\top PDP^\top X = (P^\top X)^\top D(P^\top X) = Y^\top DY$$

en posant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P^\top X$. Comme toutes les valeurs propres λ_i de $A^\top A$ sont majorées par α, on obtient

$$X^\top A^\top AX = Y^\top DY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \leq \alpha \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \alpha\, Y^\top Y = \alpha\, X^\top X$$

puisque $Y^\top Y = (P^\top X)^\top P^\top X = X^\top P^\top PX = X^\top X$ car $P^\top P = I_n$.

L'inégalité obtenue peut aussi s'écrire $\|AX\|^2 \leq \alpha\|X\|^2$. De la même façon, on a aussi $\|BX\|^2 \leq \beta\|X\|^2$ pour tout X.

3. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$, il existe alors X non nul dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = \lambda X$. La majoration obtenue en **Q2.** ci-dessus s'écrit aussi $\|AX\|^2 \leq \alpha\|X\|^2$, soit $\lambda^2\|X\|^2 \leq \alpha\|X\|^2$, donc $\lambda^2 \leq \alpha$ puisque $\|X\|^2 > 0$. Donc $|\lambda| \leq \sqrt{\alpha}$ (il est clair que $\alpha \geq 0$ puisque la matrice $A^\top A$ est symétrique positive).

4. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$, alors il existe X non nul dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $MX = A^\top BX = \lambda X$, alors en notant $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, on a

$$|\lambda|\,\|X\|^2 = \big|(X|\lambda X)\big| = \big|(X|A^\top BX)\big| = \big|X^\top A^\top BX\big| = \big|(AX|BX)\big| \leq \|AX\|\,\|BX\|$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Puis, en utilisant **Q2.**, on a

$$|\lambda|\,\|X\|^2 \leq \sqrt{\alpha}\|X\| \times \sqrt{\beta}\|X\| = \sqrt{\alpha\beta}\|X\|^2 \ ,$$

donc $|\lambda| \leq \sqrt{\alpha\beta}$ puisque $\|X\|^2 > 0$.

PROBLÈME 2

d'après CCP 2015 filière PC

1. Par récurrence sur la taille de la matrice: si $A = (a)$ est une matrice carrée d'ordre 1 (i.e. un scalaire), c'est évident. Si on suppose la propriété vraie pour toute matrice carrée d'ordre $n-1$ ($n \geq 2$ donné), et si $A = (a_{i,j})$ est une matrice carrée d'ordre n à coefficients entiers relatifs, un développement par rapport à la dernière colonne donne

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,n}\, c_{i,n} \ ,$$

où les cofacteurs $c_{i,n}$ sont (au signe près) des déterminants de matrices extraites de A, carrées d'ordre $n-1$. Par l'hypothèse de récurrence, les $c_{i,n}$ sont des entiers relatifs et, comme les $a_{i,n}$ sont aussi entiers, on déduit que $\det(A) \in \mathbf{Z}$.

2. Il y a n^2 coefficients à choisir pour construire une matrice carrée d'ordre n, et pour chacun d'eux il y a 2 choix possibles (1 ou -1), il y a donc 2^{n^2} matrices binaires d'ordre n.

3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ convient.

4.a. Les coefficients appartiennent à $\{-1, 1\}$ et il suffit de vérifier l'orthogonalité deux à deux des colonnes.

b. On vérifie que $A_4^2 = 4I_4$, donc $S^2 = I_4$ et $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$. Comme $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ annule φ, on en déduit que φ est diagonalisable (le polynôme annulateur trouvé est scindé à racines simples) et que $\mathrm{Sp}(S) = \mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{-1, 1\}$. Comme φ est diagonalisable et n'est pas une homothétie, il a au moins deux valeurs propres, donc $\mathrm{Sp}(S) = \mathrm{Sp}(\varphi) = \{-1, 1\}$.

c. Comme $A_4 = 2S$, on déduit que A_4 est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(A_4) = \{-2, 2\}$.

d. Il ne reste plus qu'à déterminer les sous-espaces propres. On a $A_4 - 2I_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour déterminer le sous-espace propre $E_2(A_4)$, on doit résoudre le système linéaire $(A_2 - 2I_4)X = 0$ avec $X = (x, y, z, t)$. Par les opérations élémentaires sur les lignes $L_i \leftarrow L_i + L_1$ $(2 \leq i \leq 4)$, ce système est équivalent à $MX = 0$ avec $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

de rang 2, qui s'écrit encore (en choisissant z et t comme "paramètres"): $\begin{cases} y = z \\ x = 2z + t \end{cases}$.

Par la "construction canonique" (on fait le choix de $(z, t) = (1, 0)$ puis de $(z, t) = (0, 1)$), on obtient une base du sous-espace propre recherché:

$$E_2(A_4) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) .$$

On peut procéder de la même manière pour l'autre sous-espace propre, mais on peut aussi mentionner le fait que la matrice A_4 est symétrique réelle, donc ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. En cherchant deux vecteurs linéairement indépendants et orthogonaux aux deux précédents, on obtient

$$E_{-2}(A_4) = \big(E_2(A_4)\big)^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right).$$

Finalement, $A_4 = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(2,2,-2,-2)$ et $P = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

5. On sait qu'une matrice B est orthogonale si et seulement si $B^{\top}B = I_n$, l'équivalence entre les assertions **(ii)** et **(iii)** est donc immédiate.

On a **(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)**: En effet, si B est une matrice orthogonale, alors ses colonnes $C_j(B)$ forment une base orthonormale (donc orthogonale) de $\mathbb{R}^n$. Or, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a $C_j(A) = \sqrt{n}\, C_j(B)$, les colonnes de A sont donc aussi deux à deux orthogonales, donc A est une matrice de Hadamard (puisqu'elle est par ailleurs supposée binaire).

Enfin, si **(i)** est réalisé, alors les colonnes de A (et donc aussi celles de $B = \dfrac{1}{\sqrt{n}}A$) sont orthogonales, mais comme elles sont constituées de 1 et de -1, on a $\big\|C_j(A)\big\|_2 = \sqrt{n}$ pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, donc $\big\|C_j(B)\big\|_2 = 1$. Les colonnes de la matrice B constituent donc une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, donc B est orthogonale. On a donc **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)**, ce qui achève la preuve de l'équivalence des trois assertions.

6. Soit $X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé, on a donc **(1)**: $AX = \lambda X$. En transposant, on a $X^{\top}A^{\top} = \lambda X^{\top}$. En conjuguant, on obtient la relation **(2)**: $\overline{X}^{\top}A^{\top} = \overline{\lambda}\,\overline{X}^{\top}$ (puisque les coefficients de la matrice A sont des réels). En multipliant les relations **(2)** et **(1)**, on obtient $\overline{X}^{\top}A^{\top}AX = |\lambda|^2\,\overline{X}^{\top}X$, soit $n\,\overline{X}^{\top}X = |\lambda|^2\,\overline{X}^{\top}X$ puisque l'on sait maintenant que $A^{\top}A = nI_n$. Comme $\overline{X}^{\top}X = \|X\|_2^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2$ est non nul, on déduit $|\lambda|^2 = n$, soit $|\lambda| = \sqrt{n}$.

7.a. L'opération $L_i \leftarrow a_{1,1}\,L_i - a_{i,1}\,L_1$ peut se décomposer en l'opération élémentaire de dilatation $L_i \leftarrow a_{1,1}L_i$ (qui multiplie le déterminant par $a_{1,1}$), suivie de l'opération élémentaire de transvection $L_i \leftarrow L_i - a_{i,1}\,L_1$ (qui ne modifie pas le déterminant). Au final, le déterminant est multiplié par $a_{1,1}$. Comme il y a $n-1$ opérations de ce type (i décrit l'intervalle entier $[\![2,n]\!]$), on conclut que $\det(A') = (a_{1,1})^{n-1}\,\det(A)$.

b. Les coefficients de la première ligne ne sont pas modifiés par les opérations réalisées, ce sont donc les mêmes que ceux de la matrice A initiale. Sur la première colonne, pour $i \geq 2$ (numéro de ligne), on a $a'_{i,1} = a_{1,1}a_{i,1} - a_{i,1}a_{1,1} = 0$. Enfin, pour $(i,j) \in [\![2,n]\!]^2$, on a $a'_{i,j} = a_{1,1}a_{i,j} - a_{i,1}a_{1,j} \in \{-2,0,2\}$ car on fait la différence de deux termes valant 1 ou -1.

c. Posons $B'' = \dfrac{1}{2}B'$. Alors B'' a pour coefficients -1, 0 et 1, elle est donc à coefficients entiers relatifs. Donc $\det(B'')$ est un entier relatif (question **1.**). Puis

$$\det(A) = (a_{1,1})^{-(n-1)} \det(A') = (a_{1,1})^{-(n-2)} \det(B') = (a_{1,1})^{-(n-2)}\, 2^{n-1} \det(B'')$$

et, comme $(a_{1,1})^{-(n-2)}$ vaut -1 ou 1, on déduit que $\det(A)$ est un entier multiple de 2^{n-1}.

d. Si A est une matrice de Hadamard, on a $A^\top A = nI_n$, donc $\det(A^\top A) = \det(A)^2 = \det(nI_n) = n^n$, donc $\big|\det(A)\big| = n^{\frac{n}{2}}$. De la question **c.**, on déduit (en élevant au carré) que $2^{2n-2} \mid n^n$. Cela entraîne déjà que n est un entier pair, posons donc $n = 2p$ avec $p \geq 2$. On a alors $2^{4p-2} \mid (2p)^{2p}$, puis après simplification par 2^{2p}, on a $2^{2p-2} \mid p^{2p}$. Comme $2p-2 > 0$, on en déduit que p est lui-même multiple de 2, donc $n = 2p$ est multiple de 4.

8.a. La famille $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ doit bien sûr être orthonormale, i.e. $(e_i|e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout couple (i,j). On doit avoir de plus les deux conditions

$$(\mathbf{GS1}) : \qquad \forall k \in [\![1,n]\!] \quad \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k) = \mathrm{Vect}(C_1, \cdots, C_k)\ ;$$
$$(\mathbf{GS2}) : \qquad \forall k \in [\![1,n]\!] \quad (e_k|C_k) > 0\ ,$$

qui garantissent l'unicité de la base ainsi construite par le procédé de Gram-Schmidt.

b. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a $C_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_{i,j} e_i$ *(on lit sur la j-ième colonne de la matrice de passage R les coordonnées dans la base $\mathcal{E}$ du vecteur C_j)*. Comme $C_j \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_j)$ d'après la condition **(GS1)**, les coordonnées $r_{i,j}$ avec $i > j$ sont nulles, la matrice R est donc triangulaire supérieure.

La base $\mathcal{E}$ étant orthonormale, les coordonnées d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ dans cette base sont les produits scalaires de x avec les vecteurs e_i, $1 \leq i \leq n$. Donc $r_{i,j} = (e_i|C_j)$ pour tout couple (i,j). En particulier, les coefficients diagonaux $r_{i,i} = (e_i|C_i)$ sont strictement positifs d'après la condition **(GS2)**.

c. On a donc $\det(R) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} r_{j,j} > 0$. Par ailleurs l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $\|e_j\|_2 = 1$ pour tout j donne

$$r_{j,j} = |r_{j,j}| = \big|(e_j|C_j)\big| \leq \|e_j\|_2\, \|C_j\|_2 = \|C_j\|_2\ .$$

On a donc $\det(R) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} r_{j,j} \leq \prod_{j=1}^{n} \|C_j\|_2$.

d. Introduisons la matrice de passage $Q = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{E}}$. Les bases $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{E}$ étant toutes deux orthonormales, cette matrice Q est orthogonale, et a donc un déterminant égal à 1 ou -1. Par la relation de Chasles rappelée par l'énoncé, on a $A = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{E}}\, P_{\mathcal{E},\mathcal{C}} = QR$. Donc $\big|\det(A)\big| = \big|\det(Q)\ \det(R)\big| = \big|\det(R)\big| = \det(R)$, puisque l'on sait que $\det(R)$ est positif.

e. On a ainsi obtenu l'inégalité de Hadamard: $\big|\det(A)\big| \leq \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \|C_j\|_2$ si la matrice A est inversible. Si la matrice A n'est pas inversible, alors cette inéglité est triviale puisque $\det(A) = 0$.

En supposant A inversible, chacun des facteurs des produits $\big|\det(A)\big| = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \big|(e_i|C_i)\big|$ et

$\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \|C_i\|_2 = \prod_{i=1}^{n} \|e_i\|_2\, \|C_i\|_2$ étant strictement positif, on a égalité entre ces deux produits si et seulement si on a $\big|(e_i|C_i)\big| = \|e_i\|_2\, \|C_i\|_2$ pour tout i, ce qui se produit (cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz) si et seulement si, pour tout i, le vecteur e_i est colinéaire à C_i. Dans le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, cela se produit si et seulement si, pour tout $i \geq 2$, le vecteur C_i est déjà orthogonal au s.e.v. engendré par $C_1, \cdots, C_{i-1}$, autrement dit si et seulement si les vecteurs-colonnes C_i de la matrice A sont deux à deux orthogonaux.

f. Notons déjà que, pour une matrice binaire A, en notant $C_1, \cdots, C_n$ ses vecteurs-colonnes, on a $\|C_j\|_2 = \sqrt{n}$ pour tout j, donc $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} \|C_j\|_2 = n^{\frac{n}{2}}$.

La condition $|\det(A)| = n^{\frac{n}{2}}$ est déjà nécessaire pour que A soit une matrice de Hadamard d'après **7.d.**

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, alors A est inversible (déterminant non nul) et vérifie $|\det(A)| = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \|C_j\|_2$, donc ses vecteurs-colonnes sont deux à deux orthogonaux d'après **8.e.** Comme A est une matrice binaire, c'est donc une matrice de Hadamard.

9.a. Par récurrence sur n: c'est évident pour $n = 1$ et, pour tout $n \geq 2$, si on suppose que A_{n-1} est une matrice de Hadamard, on a alors $A_{n-1}^{\top} A_{n-1} = 2^{n-1} I_{2^{n-1}}$, donc

$$A_n^{\top} A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1}^{\top} & A_{n-1}^{\top} \\ A_{n-1}^{\top} & -A_{n-1}^{\top} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_{n-1} & -A_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A_{n-1}^{\top} A_{n-1} & 0 \\ 0 & 2A_{n-1}^{\top} A_{n-1} \end{pmatrix} ,$$

soit $A_n^{\top} A_n = 2^n I_{2^n}$, donc A_n est encore une matrice de Hadamard (puisque, par ailleurs, ses coefficients sont toujours des -1 et des 1).

On a ainsi prouvé que, pour tout n entier naturel non nul, il existe une matrice de Hadamard d'ordre 2^n.

b. On peut remarquer (récurrence immédiate) que les matrices A_n sont symétriques réelles donc diagonalisables. Comme ce sont des matrices de Hadamard, on a la relation $A_n^{\top} A_n = 2^n I_{2^n}$, qui s'écrit donc aussi $A_n^2 = 2^n I_{2^n}$, donc A_n admet pour polynôme annulateur $X^2 - 2^n = \big(X + (\sqrt{2})^n\big)\big(X - (\sqrt{2})^n\big)$, d'où l'on déduit que $\mathrm{Sp}(A_n) \subset \big\{ -(\sqrt{2})^n, (\sqrt{2})^n \big\}$. Comme la trace de A_n est nulle (c'est immédiat), on en déduit que les valeurs propres $-(\sqrt{2})^n$ et $(\sqrt{2})^n$ ont la même multiplicité (qui est aussi la dimension du sous-espace propre associé).

10. Il suffit de reprendre la construction de la question **9.a.**: si $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de Hadamard, alors $H^{\top} H = nI_n$, on en déduit que $K = \begin{pmatrix} H & H \\ H & -H \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est une matrice de Hadamard puisque c'est toujours une matrice binaire et que

$$K^{\top} K = \begin{pmatrix} H^{\top} & H^{\top} \\ H^{\top} & -H^{\top} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & H \\ H & -H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2H^{\top} H & 0_n \\ 0_n & 2H^{\top} H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2nI_n & 0_n \\ 0_n & 2nI_n \end{pmatrix} = 2n\, I_{2n} .$$