DS de MATHÉMATIQUES numéro 6 COMMENTAIRES
PSI2 2024-2025

EXERCICE 1

1.a. L'étude de l'intégrabilité en 0 a souvent été omise. Pourtant, si $0 < x < 1$, l'intégrande n'est pas prolongeable par continuité en cette borne, rechercher un équivalent est donc nécessaire.

1.c. Il faut ici faire une "domination sur tout segment" et... cela se rédige! C'est donc à vous d'introduire clairement un segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, et de majorer l'intégrande, en précisant bien que cette majoration est valable pour $(x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}_+^*$.

Par ailleurs, il n'est pas pertinent de majorer e^{-t} par 1 puisqu'une fonction puissance de la forme $t \mapsto t^{a-1}$ n'est jamais intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$: si elle est intégrable en $+\infty$ alors elle n'est pas intégrable en 0.

2.b. Des cafouillages assez fréquents dans l'écriture du changement de variable, entraînez-vous à en pratiquer!

4.a. et 5.b. Il s'agit d'intervertir limite et intégrale (respectivement série et intégrale) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ **qui n'est pas un segment!** Mentionner une convergence uniforme (ou normale) ne sert donc à rien. Entraînez-vous à bien identifier les situations que l'on vous propose (intégrale sur un segment ou sur un "intervalle quelconque") et à choisir vos méthodes en conséquence, en appliquant le théorème idoine.

PROBLÈME 1

4.a. La définition même de matrice symétrique **positive** semble peu connue. En écrivant que $G = M^\top M$ (*cf.* question **2.a.**), il est pourtant immédiat que $X^\top GX$ est positif pour tout vecteur-colonne X.

6.c. Beaucoup d'erreurs ou de rédactions maladroites pour cette question qui se traite pourtant en une ligne si on connaît bien son cours de première année, et notamment le fait qu'**une application linéaire est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base**. La fin de cette partie B est un peu technique.

7.b. Attention! L'application Γ qui, à tout n-uplet $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ de vecteurs de E, associe le déterminant de Gram $\Gamma(x_1, \cdots, x_n)$, n'est pas n-linéaire! Si M est la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{X}$ dans une base convenablement choisie, $\Gamma(\mathcal{X})$ n'est pas le déterminant de la matrice M, mais celui de la matrice de Gram $G = M^\top M$, il y a donc quelque chose de "'quadratique" dans ce calcul. On voit en **7.a.** que multiplier un vecteur par λ multiplie ce déterminant par λ^2. La relation

$$\Gamma(v_1, \cdots, v_{n-1}, x + y) = \Gamma(v_1, \cdots, v_{n-1}, x) + \Gamma(v_1, \cdots, v_{n-1}, y)$$

est fausse en général. Il faut donc écrire le calcul en détail et bien préciser les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes qui permettent de développer le calcul.

9.a. Pfffou c'est dur! Aucune réponse totalement correcte.

EXERCICE 2

Un petit exercice très classique sur le théorème spectral. De trop nombreuses "erreurs de typage", i.e. des égalités entre un scalaire et une matrice par exemple, ou bien des inégalités entre des vecteurs ou entre des matrices, bref des choses qui ne veulent rien dire!

Dans ce type d'exercice, n'écrivez rien sans vous interroger sur la nature des objets que vous manipulez (scalaires, matrices-colonnes, matrices carrées)!

La définition de matrice symétrique **positive**, i.e. $X^\top MX \geq 0$ pour tout X, semble trop peu connue!

L'inégalité de la question **2.** est souvent montrée uniquement dans le cas particulier où X est un vecteur propre de la matrice $A^\top A$. C'est ici que le théorème spectral doit intervenir, pour écrire n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^n$ comme une somme de vecteurs propres de $A^\top A$.

PROBLÈME 2

4.a. Confusion fréquente (je m'y attendais, il faut dire que c'est une vacherie!) entre **symétrie** et **endomorphisme symétrique (ou "autoadjoint")**, ce n'est pas du tout la même notion. Ce n'est pas parce que la matrice S est symétrique qu'elle représente une symétrie. En fait, elle représente une symétrie qui est symétrique (*vous me suivez ?*), c'est-à-dire une symétrie orthogonale.

4.d. Un manque de méthode inquiétant dans la résolution des systèmes linéaires pour rechercher les sous-espaces propres, certains se contentent d'exhiber un vecteur "qui convient", sans se préoccuper du rang du système et donc de la dimension du sous-espace propre! Ce n'est pas suffisant.

6. Quelques réponses correctes, se limitant toutefois au cas des valeurs propres **réelles**, je n'ai vu aucun calcul utilisant le $\overline{X}$ suggéré en indication.

8.a. Cours peu connu en général sur le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt: les conditions

$$(\mathbf{GS1}) : \qquad \forall k \in [\![1, n]\!] \quad \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k) = \mathrm{Vect}(C_1, \cdots, C_k) \ ;$$
$$(\mathbf{GS2}) : \qquad \forall k \in [\![1, n]\!] \quad (e_k|C_k) > 0 \ ,$$

sont rarement citées intégralement.

9.a. Question assez élémentaire en utilisant les caractérisations données en **Q5.**, mais malheureusement peu traitée. Parce que c'est la fin du sujet?