CAHIER de TEXTES MATHÉMATIQUES
PSI2 2024-2025

Lundi 2 septembre 2024, de 9h à 12h

Lecture du poly sur les suites numériques, approfondissement sur les suites arithmético-géométriques et sur les suites définies par une récurrence linéaire d'ordre deux. Notion de limite. Suites réelles: limites et inégalités, théorème de la limite monotone, suites adjacentes. Exemples et exercices.

Pour mercredi 4 septembre: exos 2, 4, 7, 15 et 24 de la feuille "suites".

Mercredi 4 septembre 2024, de 8h à 10h

Calcul asymptotique (dans le cadre des suites), exemples, croissances comparées usuelles, notion de développement asymptotique.

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum. Principe de récurrence.

TD classe entière (11h30-13h): exos 2, 4 et 24 de la feuille "suites".

Pour jeudi 5 septembre: exos 8(a,b,c), 11 et 22 de la feuille "suites".

Jeudi 5 septembre 2024, de 10h à 12h

Ensembles dénombrables, énumération. Ensembles au plus dénombrables. Exemples de $\mathbb{N}$, de $\mathbf{Z}$, de $\mathbb{N}^2$. Tout produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est encore dénombrable. Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables. $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Les ensembles $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables.

Série numériques: exemples introductifs, notion de série convergente ou divergente, sommes partielles, somme et restes en cas de convergence.

TD groupe A (13h-14h30): exos 8a, 11 et 22a. de la feuille "suites".

TD groupe B (14h30-16h): exos 8a et 11 de la feuille "suites" + points fixes attractifs et répulsifs.

Pour lundi 9 septembre: exos 6, 10 et 19 de la feuille "suites".

Lundi 9 septembre 2024, de 10h à 13h

Correction de l'exo 6 sur les suites.

Généralités sur les séries: linéarité de la somme, condition nécessaire de convergence (le terme général tend vers zéro), exemple des séries géométriques, lien entre suites et séries (une suite converge si et seulement si la série télescopique associée converge).

Séries à termes positifs: conventions de calcul dans $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$, condition nécessaire et suffisante de convergence (les sommes partielles sont majorées), séries de référence (géométriques et Riemann), théorèmes de comparaison (notamment le critère des équivalents), règle de Riemann (ou "règle $n^\alpha u_n$").

Pour mercredi 11 septembre: exos 3 et 4 de la feuille "séries".

Mercredi 11 septembre 2024, de 8h à 10h

Règle de d'Alembert. Technique de comparaison série-intégrale.

Séries à termes quelconques, convergence absolue. La convergence absolue entraîne la convergence.

TD groupe B (10h-11h30): exos 3, 4 et 6 de la feuille "séries".

TD groupe A (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 12 septembre: exos 8, 11, 25 et 30 de la feuille "séries".

Jeudi 12 septembre 2024, de 10h à 12h

Théorème spécial des séries alternées, avec propriétés des restes. Exemples de séries semi-convergentes.

Formule de Stirling.

La série exponentielle.

TD groupe B (13h-14h30): exos 8, 11 et 30 de la feuille "séries".

TD groupe A (14h30-16h): exos 8, 11, 25 et 30 de la feuille "séries".

Pour lundi 16 septembre: exos 15a, 15c, 16 et 18 de la feuille "séries".

Samedi 14 septembre 2024, de 8h à 12h

DS numéro 1 (4 heures): vitesse de convergence d'une suite (*extrait de Centrale PC 2017*), accélération de convergence (procédés de Richardson-Romberg et d'Aitken).

Lundi 16 septembre 2024, de 10h à 13h

Correction de l'exo 15a sur les séries.

Lecture du début du poly sur l'algèbre linéaire: structure d'espace vectoriel, sous-espaces vectoriels, somme de deux s.e.v., somme directe, supplémentaires, familles libres, génératrices, bases, coordonnées d'un vecteur. Théorie de la dimension, rang d'une famille de vecteurs, formule de Grassmann.

Produit de Cauchy de deux séries numériques.

Toute série $\sum a_n$ absolument convergente est "commutativement convergente", définition dans ce cas de $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, de $\sum_{n\in A} a_n$ où A est une partie de $\mathbb{N}$.

Pour mercredi 18 septembre: exos 22 et 26(a,b) de la feuille "séries" + exos 5 et 6 de la feuille "algèbre linéaire".

Pour jeudi 26 septembre: DM 1

Mercredi 18 septembre 2024, de 8h à 10h

Lecture du poly sur l'algèbre linéaire: application linéaire, noyau, image. Endo-, iso- et automorphismes. Détermination par les images des vecteurs d'une base ou par les restrictions à deux sous-espaces supplémentaires. Endomorphismes particuliers: homothéties, projecteurs et symétries. Rang d'une application linéaire. Forme géométrique du théorème du rang, théorème du rang. Notion d'équation linéaire, compatibilité, obtention des solutions.

TD groupe A (10h-11h30): exos 22a et 26 de la feuille "séries" + exo 6 de la feuille "algèbre linéaire".

TD groupe B (11h30-13h): exo 26 de la feuille "séries" + exos 5 et 6 de la feuille "algèbre linéaire".

Pour jeudi 19 septembre: exos 7, 10, 12 et 15 de la feuille "algèbre linéaire".

Jeudi 19 septembre 2024, de 10h à 12h

Produit cartésien d'un nombre fini d'espaces vectoriels, dimension.

Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels, somme directe.

En dimension finie, on a $\dim\left(\sum_{i=1}^{m} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \dim(E_i)$, avec égalité si et seulement si la somme est directe. Base adaptée à un sous-espace vectoriel de E, ou à une décomposition de E en somme directe de m sous-espaces. Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.

TD groupe A (13h-14h30): exos 7, 10 et 12 de la feuille "algèbre linéaire".

TD groupe B (14h30-16h): exos 7, 12 et 15 de la feuille "algèbre linéaire".

Pour lundi 23 septembre: exos 18, 27, 30 et 31 de la feuille "algèbre linéaire".

Lundi 23 septembre 2024, de 10h à 13h

En dimension quelconque, projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe, détermination d'une application linéaire par ses restrictions aux sous-espaces d'une telle décomposition.

Formes linéaires, hyperplans: formes linéaires coordonnées relativement à une base, définition d'un hyperplan comme noyau d'une forme linéaire non nulle, caractérisation comme sous-espace admettant comme supplémentaire une droite. Hyperplans en dimension finie, équations cartésiennes dans une base. Dimension de l'espace des solutions d'un système linéaire homogène.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, matrices élémentaires $E_{i,j}$, relation $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$.

Relations $E_iE_j^\top = E_{i,j}$ et $E_i^\top E_j = \delta_{i,j}$, ainsi que $C_j(A) = AE_j$, $L_i(A) = E_i^\top A$ et $a_{i,j} = E_i^\top AE_j$. Matrices diagonales, triangulaires, symétriques, antisymétriques. Matrices inversibles. Transposition.

Pour mercredi 25 septembre: exos 21, 22, 30 et 44 de la feuille "algèbre linéaire".

Mercredi 25 septembre 2024, de 8h à 10h

Lecture du poly sur le calcul matriciel: représentation d'une application linéaire par une matrice, application linéaire canoniquement associée à une matrice, matrices de passage et changements de bases.

Matrices définies par blocs, opérations, matrices diagonales ou triangulaires par blocs.

Sous-espace stable par un endomorphisme, notion d'endomorphisme induit.
Si deux endomorphismes commutent, alors le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

TD groupe B (10h-11h30): exos 21, 30 et 44 de la feuille "algèbre linéaire".

TD groupe A (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 26 septembre: exos 32, 33, 35 et 43 de la feuille "algèbre linéaire".

Jeudi 26 septembre 2024, de 10h à 12h

Lien entre sous-espaces stables et matrices diagonales ou triangulaires par blocs.

Trace d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie.

Polynômes d'endomorphismes ou de matrices, définitions, opérations. Polynômes annulateurs.

TD groupe B (13h-14h30): exos 32 et 35 de la feuille "algèbre linéaire".

TD groupe A (14h30-16h): exos 32, 33 et 35 de la feuille "algèbre linéaire".

Pour lundi 30 septembre: exos 38, 40, 48 et 54 de la feuille "algèbre linéaire".

Lundi 30 septembre 2024, de 10h à 13h

Utilisation des polynômes annulateurs: calcul de l'inverse d'une matrice, des puissances d'une matrice. Exercice 48 de la feuille “algèbre linéaire”.

Fonctions continues par morceaux sur un segment, définition, propriétés. Construction de l'intégrale d'une telle fonction (d'abord à valeurs réelles, puis à valeurs complexes), propriétés. Fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque.

Théorème fondamental de l'analyse, étude de fonctions de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$, formule d'intégration par parties, formule du changement de variable.

Pour mercredi 2 octobre: exo 38 de la feuille “algèbre linéaire” + exos 6, 8 et 11 de la feuille “révisions d'analyse et fonctions intégrables”.

Mercredi 2 octobre 2024, de 8h à 10h

Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$, définition. Intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
Cas des fonctions positives: l'intégrale est convergente si et seulement si les intégrales partielles sont majorées, règle de comparaison avec $0 \leq f \leq g$.

Adaptation à un intervalle de la forme $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, ou $]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

TD groupe A (10h-11h30): exo 38 de la feuille “algèbre linéaire” + exos 6 et 11 de la feuille “révisions d'analyse et fonctions intégrables”.

TD groupe B (11h30-13h): exo 38 de la feuille “algèbre linéaire” + exos 8 et 11 de la feuille “révisions d'analyse et fonctions intégrables”.

Pour jeudi 3 octobre: exos 15 (intégrale I_1), 18 et 19 de la feuille “révisions d'analyse et fonctions intégrables”.

Jeudi 3 octobre 2024, de 10h à 12h

Cas des intégrales “faussement généralisées”, intégrales sur $]a, b[$.

Propriétés des intégrales généralisées: linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Changement de variable et intégration par parties dans des intégrales généralisées.

TD groupe A (13h-14h30): exos 18 et 19 de la feuille “révisions d'analyse et fonctions intégrables” + formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\varphi(AB) = \varphi(BA)$.

TD groupe B (14h30-16h): idem.

Pour lundi 7 octobre: exos 16 (intégrales I_1 et I_2), 17 et 21 de la feuille “révisions d'analyse et fonctions intégrables”.

Samedi 5 octobre 2024, de 8h à 12h

DS numéro 2 (4 heures): propriétés des matrices nilpotentes + un opérateur sur les suites.

Lundi 7 octobre 2024, de 10h à 13h

Intégrales généralisées absolument convergentes, la convergence absolue entraîne la convergence. Un exemple d'intégrale semi-convergente: l'intégrale de Dirichlet. Fonction intégrable sur un intervalle, exemple des fonctions de référence. Invariance par translation ou symétrie. Théorèmes de comparaison, notamment "toute fonction majorée en module par une fonction intégrable est intégrable", pratique des études locales aux bornes.

Pour mercredi 9 octobre: exos 3, 4, 14 et 23 de la feuille "révisions d'analyse et fonctions intégrables".

Mercredi 9 octobre 2024, de 8h à 10h

Théorème de stricte positivité.

Espaces vectoriels $L^1(I, \mathbb{K})$ et $L^2_c(I, \mathbb{R})$, produit scalaire et norme associée sur ce dernier, inégalité de Cauchy-Schwarz.

Suites de fonctions: définition de la convergence simple. Exemples. La convergence simple ne conserve pas la continuité des fonctions et n'autorise pas à intervertir limite et intégrale sur un segment.

TD groupe B (10h-11h30): exos 3, 4, 14 et 23 de la feuille "révisions d'analyse et fonctions intégrables".

TD groupe A (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 10 octobre: exos 20 et 24 de la feuille "révisions d'analyse et fonctions intégrables".

Jeudi 10 octobre 2024, de 10h à 12h

Introduction de la notation $\|f\|_\infty$, convergence uniforme. Exemples. Idée de majoration uniforme. Cas de la convergence uniforme sur tout segment.

Régularité de la limite d'une suite de fonctions: théorème de continuité, interversion limite-intégrale sur un segment.

TD groupe B (13h-14h30): exo 20 de la feuille "révisions d'analyse et fonctions intégrables" + matrices semblables et changements de bases.

TD groupe A (14h30-16h): idem.

Pour lundi 14 octobre: exos 2, 6 et 8 de la feuille "suites et séries de fonctions".

Lundi 14 octobre 2024, de 10h à 13h

Théorème de dérivation (classe $\mathcal{C}^1$) de la limite d'une suite de fonctions, extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Séries de fonctions: convergence simple, convergence uniforme, convergence normale. La convergence normale entraîne la convergence uniforme, la réciproque est fausse (contre-exemple).

Pour mercredi 16 octobre: exos 6 et 10 de la feuille "suites et séries de fonctions".

Mercredi 16 octobre 2024, de 8h à 10h

Théorèmes concernant la régularité de la somme d'une série de fonctions: continuité, intégration terme à terme sur un segment, dérivabilité avec extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, théorème de la double limite (*admis*).

Lecture du poly (début) sur les déterminants: déterminant d'une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n rapporté à une base, déterminant d'un endomorphisme en dimension finie, déterminant d'une matrice carrée. Définitions et propriétés générales.

TD groupe A (10h-11h30): exos 6, 10 et 13 de la feuille "suites et séries de fonctions".

TD groupe B (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 17 octobre: exos 11 et 15 de la feuille "suites et séries de fonctions".

Jeudi 17 octobre 2024, de 10h à 12h

Rappels sur les opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice, intérprétation en termes de produit matriciel, conservation du rang. Algorithme du pivot de Gauss, algorithme de Gauss-Jordan pour inverser une matrice carrée (inversible!). Complexité de l'algorithme.

Effet des opérations élémentaires sur le déterminant d'une matrice, cofacteurs, développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminants de matrices triangulaires par blocs. Déterminant de Vandermonde.

TD groupe A (13h-14h30): exos 11 et 15 de la feuille "suites et séries de fonctions".

TD groupe B (14h30-16h): idem.

Pour lundi 4 novembre: exos 16 et 17 de la feuille "suites et séries de fonctions" + exos 1, 3, 5, 7, 9, 12 et 14 de la feuille "déterminants".

VACANCES de TOUSSAINT

Lundi 4 novembre 2024, de 10h à 13h

Polynômes d'interpolation de Lagrange.

Définition des vecteurs propres et des valeurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Un vecteur x non nul est vecteur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par u.

Correction de l'exo 17 de la feuille "suites et séries de fonctions".

Pour mercredi 6 novembre: exos 1, 3, 5, 7, 9, 12 et 15 de la feuille "déterminants" + exo 2 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Mercredi 6 novembre 2024, de 8h à 10h

Notion de spectre en dimension finie. Si E est **de dimension finie**, alors

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff u - \lambda\,\mathrm{id}_E \notin \mathrm{GL}(E) \iff \det(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = 0\ .$$

Sous-espaces propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Si deux endomorphismes commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre. Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)\,x$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$. Conséquence: si P est un polynôme annulateur de u, alors les valeurs propres de u sont racines de P. Exemples.

TD groupe B (10h-11h30): exos 1, 3, 5 et 15 de la feuille "déterminants".

TD groupe A (11h30-13h): exos 3, 5, 7 et 15 de la feuille "déterminants".

Pour jeudi 7 novembre: exos 2, 4 et 5 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Pour lundi 18 novembre: DM 3.

Jeudi 7 novembre 2024, de 10h à 12h

Les sous-espaces propres sont en somme directe. Conséquences: en dimension finie n, $\mathrm{Card}\big(\mathrm{Sp}(u)\big) \leq n$ et $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\big(E_\lambda(u)\big) \leq n$. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée d'ordre n, écriture

$$\chi_A = X^n - \mathrm{tr}(A)\,X^{n-1} + \cdots + (-1)^n\,\det(A)\ .$$

TD groupe B (13h-14h30): exos 2 et 4 de la feuille "réduction des endomorphismes".

TD groupe A (14h30-16h): idem.

Pour mercredi 13 novembre: exos 9, 11 et 12 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Samedi 9 novembre 2024, de 8h à 12h

DS numéro 3 (4 heures): fonction Gamma d'Euler (caractérisation de $\ln \circ \Gamma$) + matrices symplectiques.

Mercredi 13 novembre 2024, de 8h à 10h

Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire, de deux matrices semblables, d'une transposée. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie.

Les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme caractéristique.

Conséquences: en dimension n, il y a au plus n valeurs propres ; un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, ou d'un $\mathbb{R}$-espace de dimension impaire, a au moins une valeur propre.

Multiplicité d'une valeur propre. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit. Inégalité $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.

TD groupe A (10h-11h30): exos 11, 12 et 14 de la feuille "réduction des endomorphismes".

TD groupe B (11h30-13h): exos 9, 11, 12 et 14 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Pour jeudi 14 novembre: exos 5, 10 et 15 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Jeudi 14 novembre 2024, de 10h à 12h

Expression de la trace et du déterminant à l'aide des valeurs propres lorsque le polynôme caractéristique est scindé.

Notion de matrice ou d'endomorphisme diagonalisable, diagonalisation effective $A = PDP^{-1}$, interprétation de D et de P. Condition suffisante de diagonalisablité: si un endomorphisme d'un e.v. de dimension n admet n valeurs propres distinctes, alors il est diagonalisable et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisabilité: la somme (directe) des sous-espaces propres est E, ou bien la somme des dimensions des sous-espaces propres est $n = \dim(E)$.

TD groupe A (13h-14h30): exos 10 et 15 de la feuille "réduction des endomorphismes".

TD groupe B (14h30-16h): idem.

Pour lundi 18 novembre: exos 13, 17 et 22 de la feuille "réduction des endomorphismes".

Lundi 18 novembre 2024, de 10h à 13h

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement son polyôme caractéristique est scindé et, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre est égale à la multiplicité.

Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, ou bien si et seulement si le polynôme $P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de u. L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable.

Pour mercredi 20 novembre: exos 18, 19, 21 et 26 de la feuille “réduction des endomorphismes”.

Pour jeudi 28 novembre: DM 4

Mercredi 20 novembre 2024, de 8h à 10h

Endomorphismes et matrices trigonalisables. Interprétation en termes de sous-espaces stables.

Théorème de Cayley-Hamilton, preuve dans le cas trigonalisable.

Un endomorphisme (ou une matrice) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

TD groupe B (10h-11h30): exos 19, 21 et 26 de la feuille “réduction des endomorphismes”.

TD groupe A (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 21 novembre: exos 25, 34 et 40 de la feuille “réduction des endomorphismes”.

Jeudi 21 novembre 2024, de 10h à 12h

Applications de la réduction: calculs de puissances de matrices, expression de suites vectorielles définies par une relation de récurrence linéaire.

Séries entières: définition, exemples. Lemme d'Abel. Définition du rayon de convergence.

TD groupe B (13h-14h30): exos 25, 34 et 40 de la feuille “réduction des endomorphismes”.

TD groupe A (14h30-16h): idem.

Pour lundi 25 novembre: exos 29, 38 et 44 de la feuille “réduction des endomorphismes”.

Lundi 25 novembre 2024, de 10h à 13h

Étude de la nature de la série entière pour $|z| \neq R$, convergence normale sur $\overline{D}(0, r)$ avec $r < R$.

Détermination du rayon de convergence: comparaison des coefficients de deux séries entières, utilisations de la règle de d'Alembert.

Opérations sur les séries entières: somme, produit de Cauchy, dérivation formelle (les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence).

Pour mercredi 27 novembre: exos 1, 2, 3 et 5 de la feuille "séries entières".

Mercredi 27 novembre 2024, de 8h à 10h

Régularité de la fonction somme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence $I =]-R, R[$:

- continuité car la série entière converge normalement **sur tout segment** inclus dans I ;

- obtention des primitives par primitivation terme à terme ;

- classe $\mathcal{C}^\infty$ et obtention des dérivées successives par dérivation terme à terme.

Conséquences: si $R > 0$, alors les coefficients sont $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout n. Classe $\mathcal{C}^\infty$ de certaines fonctions définies par un prolongement ou un raccordement.

TD groupe A (10h-11h30): exos 1, 2 et 3 de la feuille "séries entières".

TD groupe B (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 28 novembre: exos 6, 7, 8 et 10 de la feuille "séries entières".

Jeudi 28 novembre 2024, de 10h à 12h

Notion de fonction développable en série entière sur $]-r, r[$ avec $r > 0$, unicité du développement en série entière. Série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$. Rappel des différentes formules de Taylor (Young, avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange). Développement en série entière usuels.

TD groupe A (13h-14h30): exos 7, 8 et 10 de la feuille "séries entières".

TD groupe B (14h30-16h): exos 6, 8 et 10 de la feuille "séries entières".

Pour lundi 2 décembre: exos 13, 16, 19 et 21 de la feuille "séries entières".

Lundi 2 décembre 2024, de 10h à 13h

Notion de norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, exemples. Normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Exemples sur des espaces vectoriels de fonctions. Distance associée à une norme, boules, parties convexes. Toute boule est convexe. Parties bornées.

Correction des exos 13 et 21 sur les séries entières.

Pour mercredi 4 décembre: exos 11, 19, 22 et 23 de la feuille "séries entières".

Mercredi 4 décembre 2024, de 8h à 10h

Norme associée à un produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Exemples.

Suites convergentes dans un espace vectoriel normé, dépendance par rapport à la norme. Unicité de la limite, opérations algébriques. Toute suite convergente est bornée. Suites extraites.

Normes équivalentes.

TD groupe B (10h-11h30): exos 19, 22 et 23 de la feuille "séries entières".

TD groupe A (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 5 décembre: exos 9, 25 et 31 de la feuille "séries entières" + exos 3 et 4 de la feuille "espaces vectoriels normés".

Jeudi 5 décembre 2024, de 10h à 12h

Comparaison des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. On admet que, sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, ce qui autorise à parler de partie bornée ou de limite d'une suite sans préciser quelle est la norme choisie. Dans un espace vectoriel de dimension finie, la convergence d'une suite peut s'étudier coordonnée par coordonnée dans une base.

Points intérieurs à une partie, intérieur de la partie, parties ouvertes dans un e.v.n. Points adhérents, adhérence, parties fermées.

TD groupe B (13h-14h30): exos 9, 25 et 31 de la feuille "séries entières" + exo 4 de la feuille "espaces vectoriels normés".

TD groupe A (14h30-16h): idem.

Pour lundi 9 décembre: exos 5, 6, 8 et 9 de la feuille "espaces vectoriels normés".

Samedi 7 décembre 2024, de 8h à 12h

DS numéro 4 (4 heures): matrices tridiagonales + une étude de série entière.

Lundi 9 décembre 2024, de 10h à 13h

Caractérisation séquentielle des points adhérents, des parties fermées. Parties denses.

Les ouverts sont les complémentaires des fermés, et réciproquement. Intersections et réunions d'ouverts et de fermés.

Correction de l'exo 6 sur les EVN.

Pour mercredi 11 décembre: exos 7, 12 et 13 de la feuille "espaces vectoriels normés".

Pour jeudi 19 décembre: DM 5

Mercredi 11 décembre 2024, de 8h à 10h

Notion de limite d'une application d'une partie d'un e.v.n. vers un e.v.n. Unicité de la limite. Caractérisation séquentielle de la limite. Exemples.

Cas de la dimension finie: on étudie la limite des fonctions coordonnées relativement à une base. Limite d'une combinaison linéaire, d'une composée. Notion de continuité en un point.

TD groupe A (10h-11h30): exos 7, 11 et 12 de la feuille "espaces vectoriels normés".

TD groupe B (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 12 décembre: exos 14, 15 et 16 de la feuille "espaces vectoriels normés".

Jeudi 12 décembre 2024, de 10h à 12h

Continuité sur une partie. Opérations algébriques, composition. Cas des fonctions lipschitziennes. Images réciproques d'ouverts et de fermés.

Espaces vectoriels normés de dimension finie: Continuité des applications linéaires. Applications: continuité du produit matriciel.

TD groupe A (13h-14h30): exos 14, 15, 16 et 18b. de la feuille "espaces vectoriels normés".

TD groupe B (14h30-16h): idem.

Pour lundi 16 décembre: exos 17 et 20 de la feuille "espaces vectoriels normés".

Lundi 16 décembre 2024, de 10h à 13h

Continuité des applications bilinéaires, multilinéaires et polynomiales en dimension finie. Applications: continuité du produit matriciel, continuité du déterminant, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Théorème des bornes atteintes.

Fonctions vectorielles: interprétation cinématique ou en termes de courbe paramétrée. Dérivation, linéarité de la dérivation. Dérivée de $L \circ f$, de $B(f, g)$, de $M(f_1, \cdots, f_p)$ avec L linéaire, B bilinéaire, M multilinéaire. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Pour mercredi 18 décembre: exos 1, 4, 20 et 22 de la feuille "équations différentielles".

Mercredi 18 décembre 2024, de 9h30 à 13h

Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre un: position du problème, intervention de la linéarité, expression intégrale des solutions, théorème de Cauchy linéaire.

Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre deux: position du problème, intervention de la linéarité, théorème de Cauchy linéaire (*admis*), dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène. Méthode de variation de la constante (ou méthode de Lagrange) lorsqu'on connaît une solution de (E_0) ne s'annulant pas sur I.

Exos 1, 20 et 22 de la feuille "équations différentielles".

Pour jeudi 19 décembre: exos 12, 13 et 14 de la feuille "équations différentielles".

Jeudi 19 décembre 2024, de 10h à 12h

Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre deux: cas des équations à coefficients constants.

Résolution d'un système différentiel linéaire homogène à coefficients constants par réduction (diagonalisation ou trigonalisation) de la matrice.

TD groupe B (13h-14h30): exos 12, 13 et 14 de la feuille "équations différentielles".

TD groupe A (14h30-16h): exos 12 et 13 de la feuille "équations différentielles".

Pour lundi 6 janvier 2025: exos 17, 19, 24 et 25 de la feuille "équations différentielles" + exos 3, 6 et 7 de la feuille "probabilités sur un univers fini".

Pour mercredi 8 janvier 2025: DM 6

VACANCES de NOËL

Lundi 6 janvier 2025, de 10h à 13h

Théorème de convergence dominée, exemples.

Intégrales dépendant d'un paramètre: position du problème, vocabulaire.

Pour mercredi 8 janvier: exos 9 et 11 de la feuille "probabilités sur un univers finis" + exos 3 et 4 de la feuille "calcul intégral".

Mercredi 8 janvier 2025, de 8h à 10h

Théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Théorème de continuité des intégrales à paramètre, adaptation au cas d'une domination sur tout segment.

TD groupe A (10h-11h30): exos 9 et 11 de la feuille "probabilités sur un univers fini" + exo 3 de la feuille "calcul intégral".

TD groupe B (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 9 janvier: exos 13 et 14 de la feuille "probabilités sur un univers fini" + exos 5, 16 et 22a. de la feuille "calcul intégral".

Jeudi 9 janvier 2025, de 10h à 12h

Théorème de dérivation des intégrales à paramètre, adaptation au cas d'une domination sur tout segment. Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Dans le cas des intégrales sur un segment, utilisation éventuelle du théorème des bornes atteintes pour obtenir une domination sur tout segment.

TD groupe A (13h-14h30): exos 22a. et 27 de la feuille "calcul intégral".

TD groupe B (14h30-16h): idem.

Pour lundi 13 janvier: exos 16 et 17 de la feuille "calcul intégral".

Lundi 13 janvier 2025, de 10h à 13h

Espaces préhilbertiens, rappel de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité, cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire, identité du parallélogramme, identité de polarisation. Vecteurs orthogonaux et "théorème de Pythagore". Familles orthogonales, relation de Pythagore. Toute famille orthogonale (finie) de vecteurs non nuls est libre. Familles orthonormales. Sous-espaces orthogonaux, notion de somme directe orthogonale de s.e.v. Notion d'orthogonal d'une partie de E préhilbertien, orthogonal d'un s.e.v., propriétes, exemples (notamment exemple où $F \oplus F^{\perp} \neq E$ et $(F^{\perp})^{\perp} \neq F$).

Théorème d'intégration terme à terme, exemples d'applications. Exemple où l'on applique le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles, exemple où l'on majore à la main l'intégrale du reste.

Pour mercredi 15 janvier: exos 7, 8 et 14 de la feuille "calcul intégral" + exos 1 et 5 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Mercredi 15 janvier 2025, de 11h à 13h

Espaces euclidiens: existence de bases orthonormales, supplémentaire orthogonal d'un s.e.v., théorème de la base orthonormée incomplète, calculs dans une base orthonormale.

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel V de dimension finie dans un espace préhilbertien E: on a $V \oplus V^{\perp} = E$ et $(V^{\perp})^{\perp} = V$. Expression du projeté orthogonal $p_V(x)$ dans une base orthonormale de V, inégalité de Bessel et cas d'égalité.

TD groupe B (8h-9h30): exo 7 de la feuille "calcul intégral" + exo 5 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens" + calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(x+k)^2} \right) \mathrm{d}x$.
TD groupe A (9h30-11h): idem.

Pour jeudi 16 janvier: exos 2, 4, 9 et 14 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Jeudi 16 janvier 2025, de 10h à 12h

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie: recherche des coordonnées de $p_V(x)$ dans une base quelconque de V par résolution d'un système linéaire. Distance d'un vecteur à un s.e.v. de dimension finie.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, définition de l'orthonormalisée d'une famille libre finie dans un espace préhilbertien. Propriétés de la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{X}$, si $\mathcal{E}$ est l'orthonormalisée de $\mathcal{X}$.

TD groupe B (13h-14h30): exos 9 et 14 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens" + droite des moindres carrés.

TD groupe A (14h30-16h): exos 2, 4 et 14 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens" + droite des moindres carrés.

Pour lundi 20 janvier: exos 10 et 11 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Samedi 18 janvier 2025, de 8h à 12h

DS numéro 5 (4 heures): transformation de Fourier + jeu de Pile ou Face.

Lundi 20 janvier 2025, de 10h à 13h

Formes linéaires sur un espace euclidien ("théorème de représentation de Riesz"). Hyperplans: vecteur normal, équation cartésienne dans une BON, distance d'un vecteur à un hyperplan ou à une droite, expression de l'image d'un vecteur par la réflexion d'hyperplan H.

Isométries vectorielles (ou automorphismes orthogonaux) d'un espace euclidien: définition par conservation de la norme, caractérisations par conservation du produit scalaire, ou transformation des bases orthonormales, orthogonal d'un sous-espace stable, propriété $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$. Groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$. Exemple des symétries orthogonales, notamment des réflexions.

Pour mercredi 22 janvier: exos 16, 17, 18 et 19 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Pour jeudi 30 janvier: DM 7

Mercredi 22 janvier 2025, de 8h à 10h

Matrices orthogonales: définition par $A^\top A = I_n$, caractérisation par les vecteurs-colonnes ou les vecteurs-lignes. Groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}(n)$. Exemples. Matrices orthogonales directes et indirectes, groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SO}(n)$. Utilisation des matrices orthogonales comme matrices de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale, ou pour représenter une isométrie vectorielle d'un espace euclidien dans une base orthonormale.

TD groupe A (10h-11h30): décomposition QR + exos 16 et 18 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

TD groupe B (11h30-13h): décomposition QR + exos 16 et 17 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Pour jeudi 23 janvier: exos 20, 22, 23 et 25 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Jeudi 23 janvier 2025, de 10h à 12h

Endomorphismes autoadjoints (ou symétriques) d'un espace euclidien, propriétés élémentaires.

Représentation des endomorphismes autoadjoints par les matrices symétriques réelles en base orthonormale.

Théorème spectral: versions fonctionnelle et matricielle (pas encore de preuve).

TD groupe A (13h-14h30): exos 22 et 23 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens" + diverses propriétés des matrices orthogonales et des matrices antisymétriques réelles.

TD groupe B (14h30-16h): idem.

Pour lundi 27 janvier: exos 34 et 35 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Lundi 27 janvier 2025, de 10h à 13h

Preuve du théorème spectral. Endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs et leur caractérisation spectrale. Matrices symétriques positives et définies positives et leur caractérisation spectrale. Cas des matrices carrées d'ordre deux.

Rappels sur les ensembles dénombrables et au plus dénombrables.

Somme d'une famille dénombrable de réels positifs dans $[0, +\infty]$, sommation par paquets, interversion de sommations, notion de famille sommable.

Pour mercredi 29 janvier: exos 33, 37, 40 et 47 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Mercredi 29 janvier 2025, de 8h à 10h

Tribu sur un ensemble, propriétes, espace probabilisable, événements, vocabulaire ensembliste et probabiliste. Notion de probabilité, σ-additivité, propriétés élémentaires, espace probabilisé.

TD groupe B (10h-11h30): exos 33, 37 et 47 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

TD groupe A (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 30 janvier: exos 39, 42 et 46 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

Jeudi 30 janvier 2025, de 10h à 12h

Théorème de continuité croissante, théorème de continuité décroissante, propriété de sous-additivité, conséquences (une réunion au plus dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable). Probabilités conditionnelles, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes. Événements indépendants.

TD groupe B (13h-14h30): exos 42 et 46 de la feuille "espaces préhilbertiens et euclidiens".

TD groupe A (14h30-16h): idem.

Pour lundi 3 février: exos 2 et 5 de la feuille "probabilités".

Lundi 3 février 2025, de 10h à 13h

Distribution de probabilités sur un ensemble au plus dénombrable: si Ω est au plus dénombrable, une probabilité P sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$ est déterminée par les $P\big(\{\omega\}\big)$, avec $\omega \in \Omega$.

Notion de variable aléatoire discrète (v.a.d.) sur $(\Omega, \mathcal{A})$, fonction d'une variable aléatoire. Loi d'une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Exemple de la loi géométrique, interprétation comme temps d'attente d'un premier succès. Variables indépendantes (cas de deux uniquement).

Pour mercredi 5 février: exos 6, 7 et 10 de la feuille "probabilités".

Pour jeudi 13 février: DM 8

Mercredi 5 février 2025, de 8h à 10h

Familles finies de variables aléatoires indépendantes. Si $X_1, \cdots, X_n$ sont indépendantes, alors $f_1(X_1), \cdots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.

Loi de Poisson, interprétation comme "loi des événements rares".

TD groupe A (10h-11h30): exos 5, 6, 10 et 12 de la feuille "probabilités".

TD groupe B (11h30-13h): exos 5, 6 et 10 de la feuille "probabilités".

Pour jeudi 6 février: exos 9, 15a. et 17a. de la feuille "probabilités".

Jeudi 6 février 2025, de 10h à 12h

Couples ou n-uplets de variables aléatoires. Loi conditionnelle de X sachant un événement A. Théorème des coalitions. Suites de variables i.i.d.

Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$, exemple de la loi de Poisson.

Formule de calcul $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$ lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, cas de la loi géométrique.

TD groupe A (13h-14h30): exos 9 et 15 de la feuille "probabilités".

TD groupe B (14h30-16h): exos 9, 12 et 15 de la feuille "probabilités".

Pour lundi 10 février: exo 17 de la feuille "probabilités".

Samedi 8 Février 2025, de 8h à 12h

DS numéro 6 (4 heures): un exo sur la fonction Γ + au choix: un problème sur les matrices de Gram, ou un exo sur le théorème spectral et un problème sur les matrices de Hadamard.

Lundi 10 février 2025, de 10h à 13h

Familles sommables de nombres réels ou complexes, indexées par un ensemble au plus dénombrable.

Variables d'espérance finie à valeurs réelles ou complexes, définition de l'espérance.

Propriétés: formule de transfert, inégalité triangulaire, linéarité de l'espérance, espace vectoriel $L^1(\Omega)$, positivité et croissance pour les v.a. réelles, théorème de comparaison (si $|X| \leq Y$ et $Y \in L^1(\Omega)$, alors $X \in L^1(\Omega)$). Variables centrées. Si $X_1, \cdots, X_n$ sont d'espérance finie et indépendantes, alors $\mathrm{E}\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k)$. Inégalité de Markov.

Pour mercredi 12 février: exos 13, 17 et 19 de la feuille "probabilités".

Mercredi 12 février 2025, de 8h à 10h

Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie. Espace vectoriel $L^2(\Omega, \mathbb{R})$ et forme bilinéaire symétrique positive $(X, Y) \mapsto \mathrm{E}(XY)$, inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité. Définition de la variance, formule de Koenig-Huygens, $V(aX + b)$.

TD groupe B (10h-11h30): exo 17 de la feuille "probabilités" + simulation d'expériences aléatoires avec Python.

TD groupe A (11h30-13h): idem.

Pour jeudi 13 février: exos 13 et 19 de la feuille "probabilités".

Jeudi 13 février 2025, de 10h à 12h

Écart-type. Variance pour les lois usuelles. Variables centrées, réduites.

Covariance (c'est une forme bilinéaire symétrique positive sur $L^2(\Omega, \mathbb{R})$), formule de Koenig-Huygens généralisée, variables décorrélées, variance d'une somme.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres.

TD groupe B (13h-14h30): exos 13 et 19a. de la feuille "probabilités" + des questions sur le théorème spectral.

TD groupe A (14h30-16h): exo 19 de la feuille "probabilités" + des questions sur le théorème spectral.

Pour lundi 3 mars: exos 11, 14, 16, 20 et 28 de la feuille "probabilités".

VACANCES d'HIVER
