CORRIGÉ du D.M. de MATHÉMATIQUES numéro 8
PSI2 2024-2025

EXERCICE

d'après CCP 2011 filière PSI, et aussi Mines-Ponts 2006, filière PC

PARTIE A

A.1. Si u est positif, soit λ une valeur propre de u, soit $x \in E$ un vecteur propre associé, on a alors $x \neq 0_E$ et $u(x) = \lambda x$, d'où $0 \leq \big(u(x)|x\big) = \lambda \|x\|^2$, donc $\lambda \geq 0$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.

Si $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$, soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ les valeurs propres **distinctes** de u, ordonnées dans l'ordre croissant, ainsi $0 \leq \lambda_1 < \cdots < \lambda_m$. On sait que E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres $E_i = E_{\lambda_i}(u)$, $1 \leq i \leq m$. Si x est un vecteur de E, on le décompose suivant cette somme directe: $x = x_1 + \cdots + x_m$ avec $x_i \in E_i$ $(1 \leq i \leq m)$. On a alors, puisque $(x_1, \cdots, x_m)$ est une famille orthogonale,

$$\big(u(x)|x\big) = \Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \;\Big|\; \sum_{j=1}^{m} x_j\Big) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \|x_i\|^2 \geq 0\ ,$$

donc u est positif.

A.2. Il suffit d'adapter un peu la question **A.1.**

A.3. Si $v^2 = u$, alors u et v commutent, donc le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est stable par v. Notons alors v' l'endomorphisme induit par v sur $E_\lambda(u)$. Cet endomorphisme v' de l'espace vectoriel $F = E_\lambda(u)$ est diagonalisable (car v est diagonalisable par le théorème spectral, et on sait que l'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable). Or, si α est une valeur propre de v' et si x est un vecteur propre associé (i.e. $x \in E_\lambda(u) \setminus \{0_E\}$ et $v'(x) = \alpha x$), alors $\alpha \geq 0$ (d'après **A.1.** car on a aussi $v(x) = \alpha x$, et v est autoadjoint positif), et $\alpha^2 = \lambda$ (car $v(x) = \alpha x$ entraîne $v^2(x) = u(x) = \alpha^2 x$ et on a aussi $u(x) = \lambda x$), donc $\alpha = \sqrt{\lambda}$. Comme v' est diagonalisable et admet une seule valeur propre, c'est une homothétie, $v' = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{id}_F$. Pour tout $x \in F = E_\lambda(u)$, on a donc $v(x) = v'(x) = \sqrt{\lambda}\,x$, ce qui prouve l'inclusion $E_\lambda(u) \subset E_{\sqrt{\lambda}}(v)$.

L'inclusion réciproque est immédiate (et en fait inutile pour la suite): si $x \in E_{\sqrt{\lambda}}(v)$, alors $v(x) = \sqrt{\lambda}\,x$, puis $u(x) = v^2(x) = \lambda x$, donc $x \in E_\lambda(u)$.

A.4. Soit u autoadjoint positif. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ ses valeurs propres **distinctes**, qui sont des réels positifs, notons $E_i = E_{\lambda_i}(u)$, $1 \leq i \leq m$, les sous-espaces propres associés. On a $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_i$ puisque u est diagonalisable. S'il existe un endomorphisme v autoadjoint positif tel que $v^2 = u$, alors, d'après **A.3.**, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, v coïncide sur E_i avec l'homothétie de rapport $\sqrt{\lambda_i}$. Cette condition détermine un unique endomorphisme v de l'espace euclidien E (*une application linéaire sur E est entièrement déterminée par ses restrictions aux E_i*). Réciproquement cet endomorphisme v convient: il est autoadjoint car diagonalisable dans une base orthonormale (prendre dans chaque E_i une b.o.n. et les concaténer, puisque les E_i sont deux à deux orthogonaux), positif puisque ses valeurs propres sont les nombres positifs $\sqrt{\lambda_i}$, $1 \leq i \leq m$, et il vérifie $v^2 = u$ sur chaque E_i, donc sur E puisque $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_i$.

Remarque. Cet endomorphisme $v = \sqrt{u}$ est alors défini positif si et seulement u est lui-même défini positif.

Remarquons aussi qu'un endomorphisme autoadjoint défini positif est toujours un automorphisme de E, puisque 0 n'est pas valeur propre.

A.5. Il suffit de traduire matriciellement la question **A.4.**, mais on peut reprendre de façon plus élémentaire la démonstration de l'existence de T. Si S est symétrique positive, on sait qu'il existe $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ diagonale et $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ orthogonale, telles que $S = UDU^\top$. Les μ_i sont les valeurs propres, non nécessairement distinctes, de la matrice S, et ce sont des réels positifs. En posant $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\mu_1}, \cdots, \sqrt{\mu_n})$, puis $T = U\Delta U^\top$, on a une matrice T symétrique (car "orthogonalement diagonalisable"), positive, telle que $T^2 = S$. Pour l'unicité, il me semble nécessaire de reprendre le raisonnement fait en **A.4.**

Remarque. Cette matrice $T = \sqrt{S}$ est alors définie positive si et seulement S est elle-même définie positive.

Remarquons aussi qu'une matrice symétrique définie positive est toujours inversible, puisqu'elle n'admet pas 0 pour valeur propre.

PARTIE B.

B.1. L'endomorphisme t est autoadjoint, donc $\big(t(x)|t^{-1}(x)\big) = \Big(x\big|t\big(t^{-1}(x)\big)\Big) = (x|x) = \|x\|^2$.
D'autre part, par Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \|x\|^4 = \big(t(x)|t^{-1}(x)\big)^2 \le \|t(x)\|^2 \left\|t^{-1}(x)\right\|^2 &= \big(t(x)|t(x)\big)\,\big(t^{-1}(x)|t^{-1}(x)\big) \\ &= \Big(t\big(t(x)\big)\big|x\Big)\,\Big(t^{-1}\big(t^{-1}(x)\big)\big|x\Big) \\ &= \big(s(x)|x\big)\,\big(s^{-1}(x)\big|x\big)\ . \end{aligned}$$

Il y a égalité dans **(1)** si et seulement s'il y a égalité dans l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire **ssi** les vecteurs $t(x)$ et $t^{-1}(x)$ sont colinéaires, donc **ssi** il existe λ réel tel que $t(x) = \lambda\, t^{-1}(x)$, et cette dernière égalité équivaut à $(t \circ t)(x) = \lambda x$, soit $s(x) = \lambda x$. Bref (*comme disait Pépin*), il y a égalité dans **(1)** **ssi** x est vecteur propre de s (ou est le vecteur nul), donc **ssi** $x \in \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} E_{\lambda_i}(s)$.

B.2. On constate que $P = (X - \lambda_1)(X - \lambda_n)$. Comme $\lambda_1 \le \lambda_i \le \lambda_n$ pour tout i, on a alors $P(\lambda_i) \le 0$.

B.3. Si $x \in E_{\lambda_i}(s)$, alors $s^{-1}(x) = \dfrac{1}{\lambda_i}x$, et $P(s)(x) = P(\lambda_i)\,x$, donc $f(x) = -\dfrac{P(\lambda_i)}{\lambda_i}\,x$. Le vecteur x est donc aussi vecteur propre de f. Par le théorème spectral, on sait qu'il existe une base orthonormale $(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de s, avec $s(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout i, ces vecteurs e_i sont alors aussi vecteurs propres de f d'après le calcul précédent. On en déduit que l'endomorphisme f est autoadjoint (puisqu'il est représenté dans une base orthonormale par une matrice diagonale, donc symétrique). Comme ses valeurs propres $-\dfrac{P(\lambda_i)}{\lambda_i}$ sont positives, il est donc autoadjoint positif.

B.4. On a $Q(0) = \big(s^{-1}(x)|x\big)\,\lambda_1\lambda_n > 0$ puisque $s^{-1} \in \mathcal{S}^{++}(\mathbb{R}^n)$, et

$$\begin{aligned} Q(1) &= \big(s(x)|x\big) - (\lambda_1 + \lambda_n)\,\|x\|^2 + \lambda_1\lambda_n\,\big(s^{-1}(x)|x\big) \\ &= \left(s(x) - (\lambda_1 + \lambda_n)\,x + \lambda_1\lambda_n\,s^{-1}(x)\ \Big|\ x\right) \\ &= \Big(P(s) \circ s^{-1}(x)\ |\ x\Big)\ =\ -\big(f(x)|x\big)\ \le\ 0 \end{aligned}$$

puisque f est autoadjoint positif. Le trinôme Q change de signe, donc admet au moins une racine réelle, son discriminant est alors positif ou nul, ce qui donne

$$(\lambda_1+\lambda_n)^2\,\|x\|^4 - 4\,\lambda_1\lambda_n\,\big(s(x)|x\big)\,\big(s^{-1}(x)|x\big)\geq 0\ ,$$

soit encore la relation **(2)**:

$$\big(s(x)|x\big)\,\Big(s^{-1}(x)\big|x\Big)\leq \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\,\|x\|^4\ .$$

Cette inégalité **(2)** est connue sous le nom d'**inégalité de Kantorovitch**.

B.5. Si s n'est pas une homothétie, alors $\lambda_1<\lambda_n$ (en effet, par contraposition, si $\lambda_1=\lambda_n$, alors les λ_i sont tous égaux, donc s admet une seule valeur propre et, comme il est diagonalisable, c'est une homothétie). Les vecteurs v_1 et v_n sont donc orthogonaux (puisque les SEP d'un endomorphisme autoadjoints sont orthogonaux), alors

$$\big(s(x)|x\big)=\big(s(v_1)+s(v_n)|v_1+v_n\big)\ =\ \big(\lambda_1 v_1+\lambda_n v_n|v_1+v_n\big)=\lambda_1\|v_1\|^2+\lambda_n\|v_n\|^2=\lambda_1+\lambda_n\ .$$

De même, puisque $s^{-1}(v_1)=\dfrac{1}{\lambda_1}\,v_1$ et $s^{-1}(v_n)=\dfrac{1}{\lambda_n}\,v_n$, on obtient $\big(s^{-1}(x)|x\big)=\dfrac{1}{\lambda_1}+\dfrac{1}{\lambda_n}$. Donc $\big(s(x)|x\big)\,\big(s^{-1}(x)|x\big)=\big(\lambda_1+\lambda_n\big)\left(\dfrac{1}{\lambda_1}+\dfrac{1}{\lambda_n}\right)=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}+2+\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}=\dfrac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{\lambda_1\lambda_n}$. Enfin, puisque v_1 et v_n sont orthogonaux, on a (Pythagore) $\|x\|^2=\|v_1\|^2+\|v_n\|^2=2$ donc $\|x\|^4=4$ et on trouve bien que

$$\big(s(x)|x\big)\,\Big(s^{-1}(x)\big|x\Big)=\frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\,\|x\|^4\ .$$

PROBLÈME

PARTIE A. Lemme de Borel-Cantelli et applications.

1. On a facilement $E_n=\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k}$ pour tout n, et $E=\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\overline{A_n}$. La tribu $\mathcal{A}$ étant stable par passage au complémentaire et par intersection (ou réunion) finie ou dénombrable, on déduit que les E_n et E appartiennent bien à $\mathcal{A}$, autrement dit sont des événements.

Soit $\omega\in\Omega$. Une partie de $\mathbb{N}$ étant infinie si et seulement si elle est non-majorée, on déduit que ω appartient à F si et seulement si l'ensemble des indices n tels que $\omega\in A_n$ est non-majoré, donc

$$\omega\in F\iff\forall n\in\mathbb{N}^*\quad\exists k\geq n\qquad\omega\in A_k\ ,$$

soit $F=\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}\Big(\bigcup_{k=n}^{+\infty}A_k\Big)$, et $F\in\mathcal{A}$ pour les mêmes raisons que les E_n et E ci-dessus.

2.a. Par la propriété de sous-additivité, on a $0\leq P(B_n)=P\Big(\displaystyle\bigcup_{k=n}^{+\infty}A_k\Big)\leq\sum_{k=n}^{+\infty}P(A_k)$. Or,

$\lim_{n\to+\infty}\Big(\sum_{k=n}^{+\infty}P(A_k)\Big)=0$ car c'est le reste d'une série convergente. Par encadrement, on déduit que $\lim_{n\to+\infty}P(B_n)=0$.

b. On a $F=\bigcap_{n=1}^{+\infty}B_n$. En particulier, $F\subset B_n$ pour tout n. Donc $0\leq P(F)\leq P(B_n)$ pour tout n. Comme $P(B_n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on conclut que $P(F)=0$.

Commentaire. On vient de prouver un **lemme de Borel-Cantelli**: si une suite d'événements (A_n) est telle que la série $\sum P(A_n)$ converge, alors il est presque sûr que seulement un nombre fini de ces événements se réalise, i.e. $P(\overline{F})=1$.

3.a. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, notons A_k l'événement: "le joueur A remporte la partie numéro k". Les événements A_k sont mutuellement indépendants. Donc

$$P(C_n)=P\Big(\bigcap_{k=n}^{2n-1}A_k\Big)=\prod_{k=n}^{2n-1}P(A_k)=p^n\ .$$

La série $\sum P(C_n)$ converge, donc (question **2.b.**) il est quasi-impossible qu'une infinité d'événements C_n se réalise, autrement dit il est quasi-certain (ou presque sûr) que seulement un nombre fini de ces événements se réalise.

b.i) On reconnaît un schéma de Bernoulli: la probabilité pour le joueur A (par exemple) de remporter n succès lors de cette succession de $2n$ épreuves de Bernoulli indépendantes est

$$P(D_n)=\binom{2n}{n}\,p^n\,(1-p)^n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\,p^n\,(1-p)^n\ .$$

ii) Par exemple $\binom{2n}{n}\leq\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}=(1+1)^{2n}=2^{2n}=4^n$.

iii) Si $p\neq\frac{1}{2}$, alors $p(1-p)<\frac{1}{4}$ (étudier les variations de $x\mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$), et alors $0\leq P(D_n)\leq\big[4p(1-p)\big]^n$ (majoration par une suite géométrique de raison <1), donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum P(D_n)$ est convergente. D'après le lemme de Borel-Cantelli (question **2.b.**), il est presque sûr que l'événement D_n ne se produira qu'un nombre fini de fois, et donc qu'il existe un moment à partir duquel les deux joueurs n'égaliseront plus.

PARTIE B. Un produit eulérien.

4. Il s'agit simplement de vérifier que les $\dfrac{1}{n^x\,\zeta(x)}$, avec $n\in\mathbb{N}^*$, sont des réels positifs dont la somme vaut 1, ce qui est immédiat.

5. Comme $a\mathbb{N}^*=\{ka\ ;\ k\in\mathbb{N}^*\}$, on a

$$P(a|X)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=ka)=\frac{1}{\zeta(x)}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(ka)^x}=\frac{1}{a^x}\ .$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $k_1, \cdots, k_r$ des entiers naturels tels que $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq n$. Alors, d'après la propriété d'arithmétique rappelée par l'énoncé, on a

$$\bigcap_{i=1}^{r}(p_{k_i}\mathbb{N}^*) = \Big(\prod_{i=1}^{r} p_{k_i}\Big)\mathbb{N}^* \ , \qquad \text{donc} \qquad \bigcap_{i=1}^{r}\{p_{k_i}|X\} = \Big\{\prod_{i=1}^{r} p_{k_i}\big|X\Big\} \ ,$$

donc

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{r}\{p_{k_i}|X\}\Big) = \frac{1}{\Big(\prod_{i=1}^{r} p_{k_i}\Big)^x} = \prod_{i=1}^{r}\frac{1}{p_{k_i}^x} = \prod_{i=1}^{r} P(p_{k_i}|X) \ ,$$

ce qui prouve l'indépendance mutuelle des événements $\{p_k|X\}$ avec $1 \leq k \leq n$.

7. Dans $\mathbb{N}^*$, seul le nombre 1 n'est divisible par aucun nombre premier. Donc $\{1\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty}\overline{p_k\mathbb{N}^*}$ (complémentaire dans $\mathbb{N}^*$), soit $\{X = 1\} = \bigcap_{k=1}^{+\infty}\overline{\{p_k|X\}}$ dans Ω. Autrement dit, si $\omega \in \Omega$, alors $X(\omega)$ vaut 1 si et seulement si $X(\omega)$ n'est multiple d'aucun nombre premier.

8. Du théorème de continuité décroissante, on déduit alors que

$$\frac{1}{\zeta(x)} = P(X=1) = P\Big(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\overline{\{p_k|X\}}\Big) = \lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcap_{k=1}^{n}\overline{\{p_k|X\}}\Big) \ .$$

En effet, si (A_n) est une suite **quelconque** *d'événements, on a* $P\Big(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\Big) = \lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\Big)$.

Or, l'indépendance mutuelle des événements $\{p_k|X\}$, avec $1 \leq k \leq n$, entraîne l'indépendance des événements contraires, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{n}\overline{\{p_k|X\}}\Big) = \prod_{k=1}^{n}\big(1 - P(p_k|X)\big) = \prod_{k=1}^{n}\Big(1 - \frac{1}{p_k^x}\Big) \ .$$

La conclusion est immédiate.

PARTIE C. La série des inverses des nombres premiers.

9. Il est clair que $\lim_{k\to+\infty} p_k = +\infty$, on déduit que $u_k = -\ln\Big(1 - \frac{1}{p_k}\Big) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p_k}$. Les deux séries étant à termes positifs, elles sont alors de même nature.

10. On peut envisager différentes méthodes, entre autres:

Méthode 1. Pour $x > 1$ fixé, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui autorise à utiliser la comparaison série-intégrale : on a l'encadrement $\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}$, la première inégalité étant valable pour $n \geq 1$, la deuxième pour $n \geq 2$. En sommant ces inégalités pour n de 1 à $+\infty$ (les séries et intégrales impropres entrant en jeu sont convergentes), on obtient l'encadrement

$$\forall x \in]1, +\infty[\qquad \frac{1}{x-1} = \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x} = 1 + \frac{1}{x-1} \ ,$$

d'où $\zeta(x) \underset{x\to1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$ et $\lim_{x\to1^+}\zeta(x) = +\infty$. *Il suffisait bien sûr ici de minorer $\zeta(x)$.*

Méthode 2. La fonction ζ est définie sur $]1,+\infty[$, et elle est décroissante sur cet intervalle (car somme des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$, qui sont toutes décroissantes avec $n \in \mathbb{N}^*$). D'après le théorème de la limite monotone, elle admet au point 1 une limite (finie ou infinie). Pour montrer que la limite est $+\infty$, il suffit alors de montrer que la fonction ζ n'est pas majorée. Montrons-le par l'absurde, supposons l'existence d'un réel M tel que $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq M$ pour tout $x > 1$. On aurait alors a fortiori $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leq M$ pour tout $x > 1$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$. En fixant $N \in \mathbb{N}^*$ et en faisant tendre x vers 1, on déduirait $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq M$ et ceci pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. La série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ aurait alors ses sommes partielles majorées par M et serait alors convergente (c'est une série à termes positifs), mais ceci est faux! *Cette deuxième méthode est très proche de la démarche de la question* **11.** *ci-dessous.*

11.a. On suppose donc que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)\right) = S < +\infty$. Comme toute somme partielle d'une série à termes positifs est majorée par la somme de la série, on a alors

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=1}^{N} \left(-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)\right) \leq S\ .$$

Mais, un entier p premier étant fixé, l'application $x \mapsto -\ln\left(1 - \dfrac{1}{p^x}\right)$ est décroissante. On en déduit, par sommation d'inégalités de même sens que

$$\forall x > 1 \quad \forall N \in \mathbb{N}^* \qquad \sum_{k=1}^{N} \left(-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)\right) \leq S\ .$$

b. Le résultat de la question **8.** peut se traduire par

$$\forall x \in]1,+\infty[\qquad \ln\big(\zeta(x)\big) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \left(-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k^x}\right)\right)\ .$$

En fixant $x > 1$, et en faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'inégalité obtenue en **a.**, on obtient $\ln\big(\zeta(x)\big) \leq S$ pour tout $x > 1$.

c. On aurait donc $\zeta(x) \leq e^S$ pour tout $x > 1$, ce qui contredit le fait que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty$. L'hypothèse formulée en préambule de cette question **11.** est donc invalidée. On en conclut que la série $\sum u_k$ diverge, puis d'après **a.**, que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$ est elle aussi divergente.