DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 9

PSI2 2024-2025 **à rendre le jeudi 06/03/2025**

On considère une file d'attente à une caisse de supermarché. Il y a un caissier et un nombre de places supposé illimité dans la file. Les clients sont traités dans leur ordre d'arrivée. On appelle "système" l'ensemble constitué des clients en attente et du client en cours de passage en caisse.

On introduit la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que A_n représente le nombre de clients arrivant dans la file pendant le service du client n.

On définit une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ comme suit:

$$X_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad X_{n+1} = \begin{cases} A_{n+1} & \text{si } X_n = 0 \\ X_n - 1 + A_{n+1} & \text{si } X_n > 0 \end{cases} .$$

On suppose que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite i.i.d., et on notera simplement A sans indice une varable aléatoire qui a la même loi que les A_n, pour simplifier.

Dans tout ce problème, nous ferons les hypothèses suivantes:

(H1): Pour tout entier n, on a $P(A \geq n) > 0$;

(H2): La variable A est d'espérance finie, on pose $\rho = \mathrm{E}(A)$.

I. Fonction caractéristique.

Dans cette section, X représente une variable aléatoire quelconque à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit sa **fonction caractéristique** $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{int}\, P(X = n) .$$

1. Montrer que la fonction φ_X est continue sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est périodique. Montrer que, pour tout t réel, on a $\left|\varphi_X(t)\right| \leq 1$.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que $\varphi_X = \varphi_Y$. Montrer que X et Y ont la même loi.

Indication. On pourra considérer les intégrales $I_k = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_X(t)\, e^{-ikt}\, \mathrm{d}t$ *pour* $k \in \mathbb{N}$.

3. Si X est d'espérance finie, montrer que φ_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et calculer $\varphi_X'(0)$.

4. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p, avec $p \in]0,1[$. Déterminer la fonction caractéristique de la variable $Z = Y - 1$.

5. Si X et Y sont indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, exprimer φ_{X+Y} à l'aide de φ_X et φ_Y.

II. Quelques préliminaires.

6. Établir que X_n représente le nombre de clients dans le système au moment du départ du client n.

7. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, les variables X_n et A_{n+1} sont indépendantes. *On cherchera à exprimer* X_n *sous la forme* $X_n = f_n(A_1, \cdots, A_n)$.

8. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit la variable $Y = (X-1)\cdot \mathbb{1}_{\{X>0\}}$. Établir l'identité

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi_Y(t) = P(X=0) + e^{-it}\Big(\varphi_X(t) - P(X=0)\Big)\ .$$

On rappelle que, si E est un événement, la notation $\mathbb{1}_E$ représente la variable indicatrice de l'événement E, c'est-à-dire la variable aléatoire définie sur Ω par

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \mathbb{1}_E(\omega) = \begin{cases} 1 \ \text{si} \quad \omega \in E \\ 0 \ \text{sinon.} \end{cases} \ .$$

9. Pour tout n entier naturel, établir l'identité

$$\varphi_{X_{n+1}}(t) = \varphi_A(t)\,\Big(e^{-it}\,\varphi_{X_n}(t) + (1-e^{-it})\,P(X_n=0)\Big)\ .$$

III. Convergence en loi

On suppose dorénavant que $0 < \rho < 1$.

On admet qu'alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 0) = \alpha$, où l'on a posé $\alpha = 1-\rho$.

On fera de plus l'hypothèse:

(H3): Pour tout réel t non multiple de 2π, on a $\big|\varphi_A(t)\big| < 1$.

On définit une application $\theta : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ par

$$\theta(0) = 1 \quad \text{et ,} \quad \text{si } t \neq 0\ , \ \ \theta(t) = \alpha\,\frac{\varphi_A(t)\,(1-e^{-it})}{1-\varphi_A(t)\,e^{-it}}\ .$$

10. Écrire le développement limité à l'ordre un de la fonction φ_A au voisinage de 0.

11. Établir la continuité de la fonction θ en 0.

12. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [-\pi,\pi]$, établir l'identité

$$\varphi_{X_{n+1}}(t) - \theta(t) = \varphi_A(t)\,e^{-it}\,\big(\varphi_{X_n}(t) - \theta(t)\big) + \varphi_A(t)\,(1-e^{-it})\,\big(P(X_n=0) - \alpha\big)\ .$$

13. Soit (u_n) une suite réelle. On suppose qu'il existe un réel k appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et une suite réelle (r_n) de limite nulle, tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \big|u_{n+1}\big| \leq k\,|u_n| + |r_n|\ .$$

On se donne par ailleurs un réel ε strictement positif.

a. Justifier l'existence d'un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|r_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}(1-k)$.

b. Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geq N$, on a $|u_n| \leq k^{n-N}\,|u_N| + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

c. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

14. Montrer que la suite de fonctions (φ_{X_n}) converge simplement sur $[-\pi,\pi]$ vers la fonction θ.

15. On suppose qu'il existe une variable aléatoire Y, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que $\forall t \in [-\pi,\pi] \quad \varphi_Y(t) = \theta(t)$. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad P(Y=k) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k)\ .$$

IV. Une application.

Dans cette partie, on suppose que la fonction caractéristique de la variable A est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_A(t) = \frac{1}{1+\rho-\rho\, e^{it}}\ , \quad \text{avec } 0<\rho<1\ .$$

16. Identifier la loi de A. *On pourra utiliser la question* **4.**

17. Montrer que l'hypothèse **(H3)** est satisfaite.

18. Calculer $\theta(t)$ (*on reprend les notations introduites dans la Partie III).* En déduire, pour tout k entier naturel, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k)$.

V. Fonction caractéristique (généralisation).

Cette partie peut être traitée indépendamment de ce qui précède.

On rappelle que la fonction **sinus cardinal**, notée sinc, est définie sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{sinc}(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ si $t \neq 0$, et $\operatorname{sinc}(0) = 1$.

19. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R} \quad |\operatorname{sinc}(t)| \leq 1$.

20. En utilisant le cours sur les séries entières, montrer que la fonction sinus cardinal est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète, prenant ses valeurs dans l'ensemble dénombrable $E = \{x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$, les x_n étant supposés distincts. On appelle **fonction caractéristique** de X la fonction $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)\, e^{ix_n t}\ .$$

21. Montrer que la fonction φ_X est continue sur $\mathbb{R}$, et que $|\varphi_X(t)| \leq 1$ pour tout réel t.

22. Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $T > 0$, vérifier la relation

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-iat}\, \varphi_X(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) \operatorname{sinc}\big((x_n - a)T\big)\ .$$

23. En déduire que, pour tout réel a, on a

$$P(X = a) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-iat}\, \varphi_X(t)\, \mathrm{d}t\ .$$

NB: On vient ainsi de prouver que la connaissance de la fonction caractéristique φ_X détermine entièrement la loi de X.