DM de MATHÉMATIQUES numéro 8 COMMENTAIRES
PSI2 2024-2025

C'est peut-être dû à la fatigue et à une surcharge de travail en cette période hivernale, mais j'ai vu dans certaines copies (et parfois chez les meilleurs d'entre vous) des erreurs assez surprenantes, notamment dans le problème de proba: par exemple, écrire que $P\Big(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\Big) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} P(A_n)$ alors que les A_n ne sont nulle part supposés disjoints, ou bien utiliser la question **2.** sans mentionner que son hypothèse d'application $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(C_n) < +\infty$ est bien satisfaite! En algèbre aussi, les erreurs et insuffisances de rédaction sont nombreuses.

EXERCICE

A.3. et A.4. Ces deux questions sont liées et cela n'a pas toujours été bien compris.

En **A.3.**, il s'agit de préparer la preuve de l'unicité de $v \in \mathcal{S}^+(E)$ vérifiant $v^2 = u$ en montrant que, si un tel endomorphisme v existe, alors il induit sur chaque sous-espace propre $E_\lambda(u)$ de u une homothétie de rapport $\sqrt{\lambda}$ et, comme E est la somme des $E_\lambda(u)$ d'après le théorème spectral, cela détermine entièrement v.

Pour montrer cela en **A.3.**, il fallait clairement mentionner le fait que cet endomorphisme induit v_λ <u>était diagonalisable</u> (car lui aussi autoadjoint) <u>et admettait une seule valeur propre</u>. L'argumentation était loin d'être toujours suffisante.

B.2. Que de maladresses bien souvent pour déterminer les racines d'un trinôme, qui sont assez visiblement λ_1 et λ_n, et ensuite dire que ce trinôme est négatif entre ses racines!

B.3. Bon nombre d'entre vous semble ne pas avoir reconnu le trinôme introduit à la question précédente! Les valeurs propres de f sont en effet les $-\dfrac{P(\lambda_i)}{\lambda_i}$ avec $1 \leq i \leq n$.

Attention! Pour montrer que f est autoadjoint positif, il ne suffisait pas de montrer que $\big(f(x)|x\big)$ est positif lorsque x est un vecteur propre de s, il fallait montrer cette inégalité <u>**pour tout**</u> vecteur x de E... toujours la même méthode: en utilisant le théorème spectral pour décomposer x dans une base orthonormale constituée de vecteurs propres de s. Cela revient aussi à montrer que les $-\dfrac{P(\lambda_i)}{\lambda_i}$ sont <u>**les seules**</u> valeurs propres de f.

B.4. L'inégalité "de Kantorovitch" s'obtient de façon analogue à celle de Cauchy-Schwarz, i.e. en utilisant le fait que l'on connaît le signe du discriminant du trinôme Q puisqu'on sait qu'il admet une racine entre 0 et 1. Sur certaines copies, j'ai vu un calcul différent, un peu capillotracté, mais qui me semble être exact.

B.5. Il faudrait d'abord mentionner que l'hypothèse que s n'est pas une homothétie entraîne $\lambda_1 \neq \lambda_n$ (si on avait $\lambda_1 = \lambda_n$, alors s serait diagonalisable puisqu'il est autoadjoint, et avec une seule valeur propre, donc serait une homothétie).

Comme les sous-espaces propres de s sont deux à deux orthogonaux, on a $(v_1|v_n) = 0$, cela n'a pas toujours été vu.

PROBLÈME

2. Quelques erreurs, comme celle mentionnée en préambule: les événements A_n n'étant pas supposés deux à deux incompatibles, on n'a pas $P\Big(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k\Big) = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$, mais seulement une inégalité (par la propriété de sous-additivité), ce qui suffit pour conclure.

3.a. Il s'agit bien sûr d'appliquer la question **2.** pour montrer que l'événement $F = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} C_k \right)$ est négligeable. Mais encore faudrait-il s'assurer que l'hypothèse de validité de la question **2.**, à savoir la convergence de la série $\sum P(C_n)$, est satisfaite! **Et il n'est pas pertinent de dire** (même si ce n'est pas faux) **que** $\lim_{n \to +\infty} P(C_n) = 0$: en effet, cette condition, plus faible, ne suffit pas a priori pour appliquer la question précédente.

3.b.i) J'ai souvent lu que "D_n suit une loi binomiale". Problème: ce que l'énoncé note D_n n'est pas une <u>variable aléatoire</u>, c'est un <u>événement</u>! Donc cela ne signifie rien!

3.b.iii) La convergence de la série $\sum P(D_n)$ est souvent obtenue, mais la conséquence en termes d'"égalisations" des deux joueurs n'est pas toujours obtenue. Le lien avec ce qui précède a-t-il été perçu ?

6. Rappel: Pour montrer que des événements $A_1, \cdots, A_n$ sont indépendants, il ne suffit pas de montrer que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$, il faut vérifier une identité analogue **pour toute sous-famille** $(A_i)_{i \in I}$ avec $I \subset [\![1, n]\!]$, I non vide.

8. Travailler ici d'abord sur des intersections **finies** d'événements, d'abord parce que la notion de **produit infini** de nombres n'est pas à votre programme, et surtout car la définition d'événements indépendants est toujours formulée en termes d'intersections finies. On passe ensuite du fini à l'infini en utilisant un théorème de continuité monotone (d'ailleurs, ils sont là pour ça, ces fameux théorèmes).

9. Simple utilisation du critère des équivalents pour des séries à termes positifs. Il serait bien d'ailleurs de mentionner clairement que ce sont des **séries à termes positifs**.

10. Il n'est pas question ici d'utiliser le théorème de la double limite, d'abord parce que, s'il y a convergence normale de la série de fonctions définissant ζ **sur tout segment** inclus dans $]1, +\infty[$, il n'y a plus convergence normale (ni même uniforme) sur $]1, a]$ avec $a > 1$. Ensuite parce que **le théorème d'interversion limite-somme, lorsqu'il s'applique,** <u>**ne conduit jamais à des limites infinies**</u>.

11.c. Conclure en disant que "S diverge" est un peu étrange, S étant un nombre **fixé** dans $[0, +\infty]$, même s'il vaut $+\infty$... La bonne formulation consiste à déduire la divergence de la série $\sum u_k$, puis de la série $\sum \frac{1}{p_k}$.