CORRIGÉ du D.M. de MATHÉMATIQUES numéro 9
PSI2 2024-2025

sujet adapté d'un "sujet zéro" proposé par le Concours Mines-Ponts en 2015

I. Fonction caractéristique.

1. Posons $u_n(t) = P(X=n)\,e^{int}$, les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$, et $\left|u_n(t)\right| = P(X=n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, donc $\|u_n\|_\infty = P(X=n)$. Comme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = 1$, on a prouvé la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum u_n$. On en déduit que la fonction φ_X est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Chaque fonction u_n étant 2π-périodique, il en est de même de la fonction somme φ_X. Enfin, par l'inégalité triangulaire généralisée, $\displaystyle\left|\varphi_X(t)\right| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\,e^{int}\right| \le \sum_{n=0}^{+\infty} \left|P(X=n)\,e^{int}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) = 1.$

Remarque. La formule de transfert permet d'écrire $\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX})$ pour tout t réel, et l'inégalité triangulaire sur les espérances donne aussi

$$\left|\varphi_X(t)\right| = \left|\mathrm{E}(e^{itX})\right| \le \mathrm{E}\big(|e^{itX}|\big) = \mathrm{E}(1) = 1\ .$$

2. Fixons k entier naturel, alors $\displaystyle I_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_X(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t$, en posant $v_n(t) = P(X=n)\,e^{i(n-k)t}$. Les fonctions v_n sont continues sur le segment $[-\pi,\pi]$ et $\|v_n\|_\infty = P(X=n)$ d'où (comme ci-dessus) la convergence normale sur le segment $[-\pi,\pi]$ de la série de fonctions $\sum v_n$. Cela permet, **sur un segment**, d'intervertir série et intégrale. Donc

$$I_k = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} v_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\,2\pi\,\delta_{k,n}\ ,$$

soit $I_k = P(X=k)$. La connaissance de la fonction caractéristique de X permet de retrouver la loi de X. Donc, si $\varphi_X = \varphi_Y$, les variables X et Y ont la même loi, i.e. $X \sim Y$. *Attention à ne pas prétendre que $X = Y$!*

3. De nouveau avec $u_n(t) = P(X=n)\,e^{int}$, les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On a $u_n'(t) = inP(X=n)e^{int}$, et $\|u_n'\|_\infty = nP(X=n)$, terme général d'une série convergente (puisque c'est celle qui définit l'espérance). La série $\sum u_n'$ converge donc normalement sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction $\displaystyle\varphi_X = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\displaystyle\varphi_X'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(t) = i\sum_{n=0}^{+\infty} n\,P(X=n)\,e^{int}$. En particulier,

$$\varphi_X'(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} in\,P(X=n) = i\,\mathrm{E}(X)\ .$$

4. On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y=n) = p(1-p)^{n-1}$. Donc

$$Z(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad P(Z=n) = P(Y=n+1) = p(1-p)^n\ .$$

Donc, pour tout réel t, $\displaystyle\varphi_Z(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^n\,e^{int} = p\sum_{n=0}^{+\infty}\big((1-p)e^{it}\big)^n = \frac{p}{1-(1-p)e^{it}}.$

5. Posons $Z = X + Y$. Si X et Y sont indépendantes, alors pour tout n entier naturel, on a

$$\{Z = n\} = \bigsqcup_{k=0}^{n} \Big(\{X = k\} \cap \{Y = n-k\}\Big)$$

et, par indépendance des variables X et Y, $P(Z = n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X = k)\; P(Y = n-k)$.
Donc, pour tout réel t,

$$\varphi_Z(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z = n)\; e^{int} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} P(X = k) e^{ikt}\; P(Y = n-k) e^{i(n-k)t}\Big)\;.$$

On reconnaît un produit de Cauchy: les séries $\displaystyle\sum_{k\geq 0} P(X = k) e^{ikt}$ et $\displaystyle\sum_{l\geq 0} P(Y = l) e^{ilt}$ étant toutes deux absolument convergentes, de sommes respectives $\varphi_X(t)$ et $\varphi_Y(t)$, on a prouvé la relation

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\; \varphi_Y(t)\;.$$

Remarque. On peut aussi écrire $\varphi_{X+Y}(t) = \mathrm{E}\big(e^{it(X+Y)}\big) = \mathrm{E}\big(e^{itX} \cdot e^{itY}\big)$ et, les variables aléatoires e^{itX} et e^{itY} étant indépendantes puisqu'elles sont fonctions de deux variables indépendantes, $\varphi_{X+Y}(t) = \mathrm{E}(e^{itX}) \cdot \mathrm{E}(e^{itY}) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$.

II. Quelques préliminaires.

6. Par récurrence sur $n \geq 1$:

• Pour $n = 1$: comme $X_0 = 0$, on a $X_1 = A_1$, c'est le nombre de clients arrivés pendant le service du client 1, donc dans le système au moment du départ du client 1.

• Hérédité: Soit $n \geq 1$, supposons que c'est vrai au rang n. Deux cas se présentent:

- si $X_n = 0$, alors il n'y a aucun client en attente lors du départ du client n. Lorsque le client $n+1$ se présente à la caisse, il se fait servir et, à son départ, le nombre de clients en attente est $A_{n+1} = X_{n+1}$;

- si $X_n > 0$, il y a X_n clients en attente au départ du client n. L'un d'eux passe en caisse et sera donc le client $n+1$, il en reste donc $X_n - 1$ en attente, plus les A_{n+1} qui arrivent pendant ce temps. Le nombre de clients en attente au départ du client $n+1$ est alors $(X_n - 1) + A_{n+1} = X_{n+1}$, ce qui achève la récurrence.

7. Soit la fonction $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par $g : (x, a) \mapsto \begin{cases} a & \text{si } x = 0 \\ x - 1 + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$. On a alors $X_1 = f_1(A_1)$, avec $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f_1(a_1) = g(0, a_1) = a_1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'il existe une application $f_n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ telle que $X_n = f_n(A_1, \cdots, A_n)$. On a alors $X_{n+1} = g(X_n, A_{n+1}) = f_{n+1}(A_1, \cdots, A_n, A_{n+1})$, avec $f_{n+1} : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ définie par $f_{n+1}(a_1, \cdots, a_n, a_{n+1}) = g\big(f_n(a_1, \cdots, a_n), a_{n+1}\big)$.

On a ainsi prouvé par récurrence sur n que la variable aléatoire X_n est fonction des variables aléatoires A_1, $\cdots$, A_n. Elle est donc indépendante de A_{n+1} par le lemme des coalitions.

8. Pour t réel, on a $\varphi_Y(t) = \mathrm{E}(e^{itY}) = \mathrm{E}\big(f(X)\big)$, avec $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad f(k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 0 \\ e^{it(k-1)} & \text{si} \quad k \in \mathbb{N}^* \end{cases} .$$

Par le théorème du transfert,

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)\, P(X = k) = P(X = 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)\, e^{it(k-1)} \\ &= P(X = 0) + e^{-it}\Big(\varphi_X(t) - P(X = 0)\Big) . \end{aligned}$$

NB: De façon un peu moins abstraite, on peut constater que $\{Y = 0\} = \{X = 0\} \sqcup \{X = 1\}$ (union disjointe) et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\{Y = k\} = \{X = k + 1\}$. Donc

$$P(Y = 0) = P(X = 0) + P(X = 1) \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(Y = k) = P(X = k + 1) .$$

Puis

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n)\, e^{int} \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n + 1)\, e^{int} . \end{aligned}$$

Après décalage d'indice,

$$\begin{aligned} \varphi_Y(t) &= P(X = 0) + e^{-it} \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)\, e^{int} \\ &= P(X = 0) + e^{-it}\Big(\varphi_X(t) - P(X = 0)\Big) . \end{aligned}$$

9. On peut noter $X_{n+1} = A_{n+1} + Y_n$, avec $Y_n = (X_n - 1) \cdot \mathbb{1}_{\{X_n > 0\}}$. Comme Y_n est fonction de X_n, et que A_{n+1} et X_n sont indépendantes, les variables A_{n+1} et Y_n sont indépendantes. Donc $\varphi_{X_{n+1}} = \varphi_A\, \varphi_{Y_n}$. On conclut en utilisant la question **8.**

III. Convergence en loi.

10. Comme φ_A est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi_A(0) = 1$ et $\varphi_A'(0) = i\,\mathrm{E}(A) = i\,\rho$, elle admet le développement limité à l'ordre un:

$$\varphi_A(t) = 1 + i\rho\, t + o(t) .$$

11. Comme φ_A est continue en 0 avec $\varphi_A(0) = 1$, on a $\varphi_A(t)\left(1 - e^{-it}\right) \underset{t\to 0}{\sim} 1 - e^{-it} \underset{t\to 0}{\sim} it$, et pour le dénominateur,

$$\varphi_A(t)\, e^{-it} \;=\; \big(1 + i\rho\, t + o(t)\big)\,\big(1 - it + o(t)\big) \;=\; 1 + i(\rho - 1)\, t + o(t) ,$$

donc $1 - \varphi_A(t)\, e^{-it} \underset{t\to 0}{\sim} -i\,(\rho - 1)\, t = i\alpha t$. Par quotient, on a $\lim\limits_{t\to 0} \theta(t) = \alpha\, \dfrac{i}{i\alpha} = 1 = \theta(0)$. La fonction θ est continue en 0. *Elle est donc continue sur $[-\pi, \pi]$ puisque, pour $t \neq 0$, le dénominateur ne s'annule pas d'après l'hypothèse* **(H3)**. *La continuité en les points autres que* 0 *est alors évidente.*

12. C'est du calcul. L'identité est triviale pour $t = 0$, sinon...

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_{n+1}}(t) - \theta(t) &= \varphi_A(t)\,\Big(e^{-it}\,\varphi_{X_n}(t) + (1 - e^{-it})\,P(X_n = 0)\Big) - \theta(t)\\
&= \varphi_A(t)\,e^{-it}\,\big(\varphi_{X_n}(t) - \theta(t)\big) + \varphi_A(t)\,(1 - e^{-it})\,P(X_n = 0)\\
&\quad -\big(1 - \varphi_A(t)\,e^{-it}\big)\,\theta(t)\\
&= \varphi_A(t)\,e^{-it}\,\big(\varphi_{X_n}(t) - \theta(t)\big) + \varphi_A(t)\,(1 - e^{-it})\,\big(P(X_n = 0) - \alpha\big)\,.
\end{aligned}$$

13.a. Résulte immédiatement de $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$ puisque $\dfrac{\varepsilon}{2}(1-k) > 0$.

b. Montrons par récurrence l'inégalité demandée pour tout entier n tel que $n \geq N$.

L'initialisation pour $n = N$ est claire.

Soit n tel que $n \geq N$, supposons que $|u_n| \leq k^{n-N}\,|u_N| + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Comme $|r_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}(1-k)$, on déduit

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}| &\leq k\,\Big(k^{n-N}\,|u_N| + \frac{\varepsilon}{2}\Big) + |r_n|\\
&\leq k^{n-N+1}\,|u_N| + k\,\frac{\varepsilon}{2} + (1-k)\,\frac{\varepsilon}{2}\\
&\leq k^{(n+1)-N}\,|u_N| + \frac{\varepsilon}{2}\,,
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

c. Le même réel strictement positif ε étant donné, et le même entier N lui étant associé, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(k^{n-N}\,|u_N|\big) = 0$, il existe un rang N_1 à partir duquel cette expression est majorée aussi par $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq \max\{N, N_1\}$, on a alors $|u_n| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

14. Pour tout t réel non nul fixé dans $[-\pi, \pi]$, on a $|e^{-it}| = 1$ et $\big|1 - e^{-it}\big| \leq 1 + |e^{-it}| = 2$. L'identité obtenue à la question **12.** donne

$$\big|\varphi_{X_{n+1}}(t) - \theta(t)\big| \leq \big|\varphi_A(t)\big|\,\big|\varphi_{X_n}(t) - \theta(t)\big| + 2\,\big|\varphi_A(t)\big|\,\big|P(X_n = 0) - \alpha\big|\,.$$

En posant $u_n = \varphi_{X_n}(t) - \theta(t)$, $k = \big|\varphi_A(t)\big|$ et $r_n = 2\big|\varphi_A(t)\big|\big|P(X_n = 0) - \alpha\big|$, les conditions de la question **13.** sont satisfaites (notamment grâce à l'hypothèse **(H3)**), on peut donc affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_{X_n}(t) = \theta(t)$.

Par ailleurs, $\varphi_{X_n}(0) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta(0) = 1$. On a ainsi prouvé la convergence simple de la suite de fonctions $\big(\varphi_{X_n}\big)$ vers la fonction θ sur $[-\pi, \pi]$.

15. Fixons k entier naturel. Par la question **2.**, on a $P(X_n = k) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{X_n}(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$ pour tout n. Posons $w_n(t) = \varphi_{X_n}(t)\,e^{-ikt}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [-\pi, \pi]$. La suite de fonctions continues (w_n) converge simplement sur $[-\pi, \pi]$, d'après **14.**, vers la fonction continue $w : t \mapsto \theta(t)\,e^{-ikt} = \varphi_Y(t)\,e^{-ikt}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, $\big|w_n(t)\big| \leq 1$, la fonction constante $t \mapsto 1$ étant intégrable sur $[-\pi, \pi]$. Le théorème de convergence dominée s'applique et donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{X_n}(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_Y(t)\,e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(Y = k)$.

IV. Une application.

16. On a $\varphi_A(t) = \dfrac{\dfrac{1}{1+\rho}}{1-\dfrac{\rho}{1+\rho}e^{it}}$. En posant $p = \dfrac{1}{1+\rho}$, on a bien $0 < p < 1$ et on reconnaît l'expression $\varphi_A(t) = \dfrac{p}{1-(1-p)\,e^{it}}$ obtenue à la question **4.** Comme la fonction caractéristique détermine la loi, on peut affirmer que $A+1$ suit la loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{1}{1+\rho}$, donc $A(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout n entier naturel,

$$P(A = n) = \frac{1}{1+\rho}\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^n = \frac{\rho^n}{(1+\rho)^{n+1}}\ .$$

Au passage, on vérifie que $\mathrm{E}(A) = \dfrac{1}{p} - 1 = \rho$.

17. On a $\left|1+\rho-\rho\,e^{it}\right| \geq \Big|\left|1+\rho\right| - \left|\rho\,e^{it}\right|\Big| = (1+\rho)-\rho = 1$, avec égalité si et seulement si les nombres complexes $1+\rho$ et ρe^{it} sont de même argument (modulo 2π), c'est-à-dire si et seulement si $t = 0$ modulo 2π. Si le réel t est non multiple de 2π, on a alors $\left|1+\rho-\rho e^{it}\right| > 1$, donc $\left|\varphi_A(t)\right| < 1$.

18. Pour $t \in [-\pi,\pi]\setminus\{0\}$, on a

$$\theta(t) = (1-\rho)\,\frac{1-e^{-it}}{1+\rho-\rho\,e^{it}-e^{-it}} = (1-\rho)\,\frac{1-e^{-it}}{(1-e^{-it})\,(1-\rho\,e^{it})} = \frac{1-\rho}{1-\rho\,e^{it}}\ .$$

On reconnaît une expression de la forme $\dfrac{p'}{1-(1-p')\,e^{it}}$, avec $p' = 1-\rho \in]0,1[$, donc, d'après la question **4.**, θ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire Y telle que $Z = Y+1$ suive la loi géométrique de paramètre p'. Par ailleurs, la question **15.** montre que, pour tout entier k, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(Y = k) = p'\,(1-p')^k = (1-\rho)\,\rho^k$.

V. Fonction caractéristique (généralisation).

19. C'est vrai pour $t = 0$. Et si $t \neq 0$, la fonction sinus étant dérivable sur $[0,t]$, de dérivée cosinus, l'inégalité des accroissements finis donne

$$\left|\sin(t)\right| = \left|\sin(t)-\sin(0)\right| \leq \left(\max_{x\in[0,t]}\left|\cos(x)\right|\right).|t-0| = |t|\ ,$$

donc $\left|\mathrm{sinc}(t)\right| \leq 1$.

20. On connaît le développement en série entière $\forall t \in \mathbb{R} \quad \sin t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$. On a alors, pour tout t réel (y compris si $t=0$), $\mathrm{sinc}(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$. La fonction sinus cardinal est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

21. Les fonctions $u_n : t \mapsto P(X = x_n)\, e^{ix_n t}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ avec $\|u_n\|_\infty = P(X = x_n)$. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) = 1$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, d'où l'existence et la continuité sur $\mathbb{R}$ de la fonction φ_X. Enfin, par inégalité triangulaire généralisée:

$$\big|\varphi_X(t)\big| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)\, e^{ix_n t}\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left|P(X = x_n)\, e^{ix_n t}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) = 1 \; .$$

Remarque. Par la formule de transfert, on peut toujours écrire $\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX})$, et utiliser l'inégalité triangulaire sur les espérances pour montrer que $\big|\varphi_X(t)\big| \leq 1$.

22. Soient a réel et $T > 0$. Alors

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-iat}\, \varphi_X(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)\, e^{i(x_n - a)t}\Big)\,\mathrm{d}t \; .$$

Posons $v_n(t) = P(X = x_n)\, e^{i(x_n - a)t}$, alors chaque fonction v_n est continue, et $\|v_n\|_\infty = P(X = x_n)$, terme général d'une série convergente, ce qui (convergence normale sur le **segment** $[-T, T]$) permet d'intervertir série et intégrale. Par ailleurs, si $x_n \neq a$,

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{i(x_n - a)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{i(x_n - a)t}}{2iT(x_n - a)}\right]_{-T}^{T} = \frac{2i\, \sin\big((x_n - a)T\big)}{2i(x_n - a)T} = \mathrm{sinc}\big((x_n - a)T\big) \; ,$$

relation valable aussi si $x_n = a$. On obtient donc la relation demandée.

23. Posons $f_n(T) = P(X = x_n)\,\mathrm{sinc}\big((x_n - a)T\big)$. D'après **19.**, on a $\|f_n\|_\infty = P(X = x_n)$, donc la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim_{T \to +\infty} f_n(T) = \begin{cases} P(X = x_n) & \text{si } x_n = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$,

le théorème d'interversion somme-limite donne

$$\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-iat}\, \varphi_X(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{T \to +\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(T)\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{T \to +\infty} f_n(T) = P(X = a) \; ,$$

cette probabilité étant nulle si $a \notin X(\Omega)$, i.e. si $x_n \neq a$ pour tout n.