DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 10

PSI2 2024-2025 **à rendre le jeudi 20/03/2025**

Le but du problème est d'introduire la notion d'**exponentielle** d'une matrice complexe.

Dans tout le problème, on note p un entier naturel non nul.

Si A est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on pose, sous réserve d'existence de la limite,

$$\exp(A) = \lim_{n\to+\infty} \left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n .$$

PARTIE A. Un calcul préliminaire.

Soit $z \in \mathbb{C}$, on pose $z = a + ib$ avec a et b réels.

1. Soit n un entier naturel tel que $n > |z|$. Déterminer le module et un argument de $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ en fonction de a, b et n.

2. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$.

PARTIE B. Matrices antisymétriques réelles d'ordre 2 ou 3.

3. Dans cette question, $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer un réel β_n strictement positif et un réel θ_n tels que

$$I_2 + \frac{1}{n}A = \beta_n\, R_n \ , \quad \text{avec} \quad R_n = \begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix} .$$

b. En déduire que $\exp(A)$ existe, et que c'est une matrice de rotation, dont on précisera l'angle.

4. Dans cette question, $B = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice antisymétrique réelle d'ordre trois.

a. Montrer qu'il existe un unique vecteur $\Omega \in \mathbb{R}^3 \simeq \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \qquad BX = \Omega \wedge X \ ,$$

où $\wedge$ désigne le produit vectoriel canonique de $\mathbb{R}^3$.

b. En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ orthogonale et un réel β tels que

$$B = P\ M_\beta\ P^{-1} \qquad \text{avec} \qquad M_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} .$$

c. Montrer que $\exp(B)$ existe et est une matrice de rotation. Si $B \neq 0_3$, préciser l'axe et l'angle de cette rotation.

PARTIE C. Exponentielles de matrices diagonalisables.

5. Soient $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $D' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ deux matrices diagonales.

a. Montrer que $\exp(D)$ existe et est une matrice inversible.

b. Que vaut $\exp(D + D')$?

6. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ diagonalisable.

a. Montrer que $\exp(A)$ existe et que $\det\big(\exp(A)\big) = e^{\mathrm{tr}(A)}$.

b. Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer que $\exp(xI_p + A)$ existe, et que $\exp(xI_p + A) = e^x\ \exp(A)$.

7. Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ diagonalisables, qui commutent.

a. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

b. En déduire que $\exp(A + B)$ existe et que $\exp(A + B) = \exp(A)\ \exp(B) = \exp(B)\ \exp(A)$.

PARTIE D. Une autre expression de l'exponentielle d'une matrice (cas particuliers).

Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est une matrice et $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$.

8. Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est diagonalisable, montrer que $\exp(A) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n(A)$.

9. Avec les notations de **Q4.**, calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n(M_\beta)$. En déduire que $\exp(B) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n(B)$.

PARTIE E. Exponentielles de matrices nilpotentes.

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice $k \in \mathbb{N}^*$, i.e. $A^{k-1} \neq 0_p$ et $A^k = 0_p$.

10.a. Montrer que, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, $\mathrm{Ker}(A^{j-1})$ est inclus strictement dans $\mathrm{Ker}(A^j)$.

b. En déduire que $k \leq p$, et que $A^p = 0_p$.

11. Montrer que $\exp(A)$ existe, et que $\exp(A)$ est un polynôme de la matrice A.

12. Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrer que $\exp(xI_p + A)$ existe et que $\exp(xI_p + A) = e^x \exp(A)$.

PARTIE F. Cas général.

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on note $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ ses valeurs propres (distinctes), et $n_1, \cdots, n_k$ leurs multiplicités. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit le polynôme $P_n(X) = \left(1 + \dfrac{X}{n}\right)^n \in \mathbb{C}[X]$.

13. Liens avec le polynôme caractéristique.

a. Montrer qu'il existe un unique couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ tel que $P_n = Q_n \chi_A + R_n$.

b. Montrer que $\exp(A)$ existe si et seulement si $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} R_n(A)$ existe.

c. Pour tout entier q compris entre 1 et p, on note J_q la matrice de $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux situés juste au-dessus de la diagonale qui valent 1.

Rechercher les polynômes annulateurs de J_q. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{C}$, pour tout $q \in [\![1, p]\!]$, la famille $\left((xI_q + J_q)^i\right)_{0 \leq i \leq q-1}$ est libre dans $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$.

d. Soit $B = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1}, \cdots, \lambda_k I_{n_k} + J_{n_k})$ la matrice diagonale par blocs définie par

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} + J_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} + J_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k I_{n_k} + J_{n_k} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) .$$

Montrer que $\chi_B = \chi_A$.

14. Existence de $\exp(A)$.

a. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression de la matrice B^i.

b. Soit P un polynôme annulateur non nul de la matrice B. Montrer que $\deg(P) \geq p$. En déduire que la famille $(I_p, B, \cdots, B^{p-1})$ est libre dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

c. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P_n(B)$ existe.

d. Montrer que, dans un e.v.n. de dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé.

e. En déduire que $\exp(A)$ existe.