EXERCICES sur le CALCUL DIFFÉRENTIEL **PSI2 2024-2025**

Calcul de dérivées partielles

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(y,x) = f(x,y)$. Quelle relation y a-t-il entre les dérivées partielles de f ?

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer l'équivalence entre les assertions:

(1) : $\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+t, y+t) = f(x,y)$;

(2) : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$

3. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer ses dérivées partielles premières.

4. Soit la fonction f définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ par $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$. Montrer que la fonction f admet une limite finie l au point $(0,0)$. Si on prolonge f par continuité en posant $f(0,0) = l$, la fonction f admet-elle alors des dérivées partielles en $(0,0)$? Montrer que f est en fait de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

5. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x,y) = f\big(x + \varphi(y)\big)$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifier l'égalité

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial F}{\partial x} = 0\,.$$

6. Expression du laplacien en coordonnées polaires

Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, soit $g : (r,\theta) \mapsto f(r\,\cos\theta, r\,\sin\theta)$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$ à l'aide des dérivées partielles de g.

7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

b. Est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

Équations aux dérivées partielles

8. En utilisant le changement de variables $\{u = xy\ ,\ v = \dfrac{y}{x}\}$, résoudre, sur l'ouvert $U = (\mathbb{R}_+^*)^2$, l'équation aux dérivées partielles

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} - 2f + 2 = 0\,.$$

9. Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x} - 3\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, avec le changement de variables $\begin{cases} u &= 2x + y \\ v &= 3x + y \end{cases}$.

10. En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telles que

$$y\,\frac{\partial f}{\partial x} - x\,\frac{\partial f}{\partial y} = f\ .$$

11. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. Montrer que l'intégrale $I(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\,\cos t, r\,\sin t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas du réel r, avec $r > 0$.

12. En utilisant les coordonnées polaires, résoudre, sur l'ouvert $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, les équations aux dérivées partielles

(1)
$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 1\ ;$$

(2)
$$x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\ .$$

Montrer qu'il existe une unique solution de **(1)** sur U vérifiant $\forall y \in \mathbb{R} \quad f(1,y) = y$ et l'expliciter.

13. Soit α un réel. Une fonction $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ est dite **homogène de degré** α si elle vérifie

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(tx,ty) = t^\alpha\, f(x,y)\ .$$

a. Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si elle est solution de l'équation aux dérivées partielles **(E) :** $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = \alpha\, f$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
On pourra considérer $g : t \mapsto f(tx,ty)$, *avec* $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ *fixé.*

b. Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, homogène de degré α. Montrer que l'on a

$$x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha\,(\alpha - 1)\,f\ .$$

14. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles que, en posant $\varphi(x,y) = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, on ait

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}\ .$$

15. Trouver les fonctions $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles que, en posant $f(x,y,z) = \varphi(r)$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, la fonction f vérifie sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + kf = 0\ ,$$

où k est un réel donné.

16. Soit $c > 0$. En posant $\begin{cases} u = x + cy \\ v = x - cy \end{cases}$, rechercher les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \ .$$

17. Une fonction f, de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U du plan, est dite **harmonique** lorsque son laplacien est nul, i.e.

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \ .$$

a. On suppose f **à symétrie sphérique** sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, i.e. $f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$, avec $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que f est harmonique si et seulement si φ' est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle d'ordre un que l'on écrira. En déduire quelles sont les fonctions harmoniques à symétrie sphérique.

b*. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, harmonique. On pose $g(r,t) = f(r\cos t, r\sin t)$.

i. Trouver une relation entre $\dfrac{\partial}{\partial r}\Big(r\,\dfrac{\partial g}{\partial r}\Big)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}$.

ii. Montrer que l'application $\varphi : r \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et prouver que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\big(r\,\varphi'(r)\big) = 0$.

iii. En déduire que φ est constante sur $\mathbb{R}$.

Recherche d'extremums

18. Soit $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \ , \ x+y \leq 1\big\}$.

a. Montrer que D est une partie fermée bornée du plan.

b. Soient $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^a\,y^b\,(1-x-y)^c$. Montrer que f est continue sur D.

c. Déterminer $\displaystyle\max_{(x,y)\in D} f(x,y)$.

19. Soit $K = [0,1]^2$. Soit $f : K \to \mathbb{R}$ définie par $f(1,1) = 0$ et

$$\forall (x,y) \in K \setminus \{(1,1)\} \qquad f(x,y) = \frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} \ .$$

a. Montrer que $\forall (x,y) \in K \quad 0 \leq f(x,y) \leq 1-y$.

b. L'application f est-elle continue au point $(1,1)$?

c. Justifier l'existence de $m = \displaystyle\min_{(x,y)\in K} f(x,y)$ et $M = \displaystyle\max_{(x,y)\in K} f(x,y)$ et déterminer leurs valeurs.

20. Soit f un endomorphisme autoadjoint défini positif de $E = \mathbb{R}^n$ (muni de sa structure euclidienne canonique). Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Soit l'application h définie sur $\mathbb{R}^n$ par $h(x) = \dfrac{1}{2}\,\langle f(x), x\rangle - < u, x >$. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et qu'elle admet un unique point critique en lequel elle atteint un minimum global strict.

21. Déterminer les extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) de

$f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
$g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy - 2y + 5$
$h : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$
$k : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$
$l : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$

22. Déterminer les extremums locaux et globaux de $f : (x, y) \mapsto y\big(x^2 + \ln(y)^2\big)$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

23. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne orientée canonique, on considère les points $M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}\cos\beta\\\sin\beta\end{pmatrix}$, où α et β sont des réels tels que $0 < \alpha < \beta < 2\pi$.

a. Montrer que l'aire du triangle MAB est $f(\alpha, \beta) = 2\,\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\ \sin\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\ \sin\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right)$.

b. Rechercher les points critiques de f dans l'ouvert $U = \big\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \alpha < \beta < 2\pi\big\}$.

c. En déduire quels sont les triangles d'aire maximale inscrits dans le cercle trigonométrique.

24. Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, soit $f : U \to \mathbb{R}$ une **fonction convexe**, i.e. telle que

$$\forall (x, y) \in U^2 \quad \forall \lambda \in [0, 1] \qquad f\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \leq (1-\lambda)\, f(x) + \lambda\, f(y)\ ,$$

et de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que tout point critique de f est un minimum global.

Applications géométriques du calcul différentiel

25. Soit la surface $\mathcal{S} : x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Existe-t-il des points de $\mathcal{S}$ en lesquels la normale est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v} = (1, 2, 3)$?

26. Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $x^2 - y^2 + z^2 = 1$. Déterminer les points de $\mathcal{S}$ en lesquels le plan tangent est parallèle au plan $P\ :\ 2x + y - z = 0$.

27. Déterminer les plans tangents à la surface $\mathcal{S}\ :\ \ z^3 = xy$ qui contiennent la droite $\mathcal{D}$ d'équations

$$\big\{x = 2 \quad ; \quad y = 3z - 3\big\}\ .$$

28*. Soit $f(x, y) = \dfrac{1 + x + y}{1 + x^2 + y^2}$.

a. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x + y| \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)}$. Montrer que $f(x, y)$ tend vers zéro quand $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ tend vers $+\infty$.

b. Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation cartésienne $z(1 + x^2 + y^2) - 1 - x - y = 0$. Déterminer les points de $\mathcal{S}$ en lesquels le plan tangent est parallèle au plan xOy. En déduire les extremums globaux de f.